

Lineare Algebra und Analytische Geometrie WS 2016-17, Blatt 12, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. (14 Punkte) Es sei

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M(4; 3 : \mathbb{R})$$

die Koordinatenmatrix $M_B^C(f)$ der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis $B = ({}^t(1, 1, 0), {}^t(0, 1, 1), {}^t(0, 1, 0))$ von \mathbb{R}^3 und der kanonischen Basis C von \mathbb{R}^4 . Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $M_{B_0}^{C_0}(f)$, wobei B_0 die kanonische Basis von \mathbb{R}^3 ist und $C_0 = ({}^t(1, 1, 2, 0), {}^t(0, 1, 1, 1), {}^t(0, 3, 2, 0), {}^t(0, 2, 3, 4))$ eine Basis von \mathbb{R}^4 ist.

2. (14 Punkte) Sei k ein Körper und $\phi : k^n \rightarrow k^m$ eine lineare Abbildung.
- Zeigen Sie: Ist $m > n$, so ist ϕ nicht surjektiv.
 - Sei jetzt $k = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und ϕ habe den Rang r . Wie viele Elemente hat $\text{Ker}(\phi)$?
 - Ist die Matrix $A \in M(3, 3 : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ mit

$$A := \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}$$

invertierbar? Sollte es der Fall sein, bestimmen Sie A^{-1} .

3. (12 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}[X]_4$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$f(a, b, c, d) := b + c + (a - b + c)x + (d - c)x^2 + cx^3.$$

Bestimmen Sie eine Basis für $\text{Ker}(\phi)$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_B^C(f)$, wobei $B := ({}^t(1, 0, 0, 0), {}^t(1, 1, 0, 0), {}^t(1, 1, 1, 0), {}^t(1, 1, 1, 1))$ und $C := (1, x, x^2, \frac{1}{3}x^3, x^4)$.

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Namen und Übungsgruppe lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!