

Lineare Algebra und Analytische Geometrie Wintersemester 2016-17, Blatt 2, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. (10 Punkte) Sei A eine Menge mit n Elementen. Man berechne die Anzahl

- aller Operationen (Verknüpfungen),
- der kommutativen Operationen,
- der kommutativen Operationen mit neutralem Element $e \in A$.

2. (10 Punkte) Beweisen Sie, dass es sich bei den folgenden Verknüpfungen um Monoide handelt:

- (\mathbb{R}^2, \circ) , mit $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) := (x_1x_2, x_2y_1 + y_2)$ und
- $(\mathbb{Z}^2, *)$, mit $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

3. (10 Punkte)

- Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung mit $f(1) = 0$. Man definiert die Verknüpfung $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$a * b := f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - 1),$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}, *)$ eine abelsche Gruppe bildet.

- Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, sodass $f(f(x)) = 5x - 4$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f invertierbar ist und bestimmen Sie f^{-1} . Berechnen Sie $f(1)$.

4. (10 Punkte) Sei M eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf M sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Es existiert ein neutrales Element.
- $(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$, für alle $a, b, c, d \in M$.

Zeigen Sie, dass $*$ kommutativ und assoziativ ist.

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Namen und Übungsgruppe lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!