Lineare Algebra und Analytische Geometrie WS 2016-17, Blatt 3, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(16 Punkte)**(a) Sei G eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$ und Elemente $x, y \in G$, sodass $x^2 = e$ und $xyx = y^3$. Beweisen Sie, dass $y^8 = e$.
(b) Sei G eine Gruppe sodass es gilt $a^2 = b^2 = (ab)^2$, für all $a, b \in G$. Dann gilt $a^4 = b^4 = (ab)^2$.

2. **(12 Punkte)** Für $a \in \mathbb{N}$ Quadrat-frei (d.h. es außer der Eins keine Quadratzahl gibt, die a teilt), betrachtet man die Menge

$$\mathbb{Q}[\sqrt{a}]^* := \{x + y\sqrt{a} : x, y \in \mathbb{Q}\} - \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]^*$ mit der Verknüpfung

$$(x_1 + y_1\sqrt{a}) * (x_2 + y_2\sqrt{a}) = x_1x_2 + y_1y_2a + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{a},$$

eine Gruppe bildet. Ist die Gruppe abelsch?

Bestimmen Sie das Inverses $(2 + 3\sqrt{5})^{-1}$ in der Gruppe $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]^*$.

3. **(12 Punkte)** (a) Seien A, B zwei Untergruppen einer Gruppe G. Zeige: Die Vereinigung $A \cup B$ ist dann und nur dann eine Untergruppe von G, wenn $A \subset B$ oder $B \subset A$.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_3.

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Namen und übungsgruppe lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!