

# Lineare Algebra und Analytische Geometrie WS 2016-17, Blatt 4, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(14 Punkte)** (a) Sei  $G$  eine Gruppe, sodass  $\text{ord}(x) = 2$ , für alle Elemente  $x \in G - \{e\}$ . Beweisen Sie, dass  $G$  abelsch ist.

(b) Beweisen Sie, dass es gibt keine nicht triviale (d.h. ungleich null) Gruppenmorphisimen

$$\phi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +).$$

2. **(12 Punkte)** (a) Sei  $G$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$  und  $x \in G$  ein erzeugendes Element. Beweisen Sie, dass das Element  $y = x^k$  die Gruppe  $G$  erzeugt, genau dann, wenn  $\text{ggT}(k, n) = 1$ . Wie viele erzeugende Elemente besitzt die Gruppe  $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ ?

(b) Beschreiben Sie die Gruppe  $((\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^*, \cdot)$ . Ist diese Gruppe zyklisch?

3. **16 Punkte** Sind  $G_1$  und  $G_2$  Gruppen, so lässt sich auf dem Produkt  $G_1 \times G_2$  die folgende Verknüpfung definieren,

$$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) := (g_1 g'_1, g_2 g'_2),$$

wobei  $g_1, g'_1 \in G_1$  und  $g_2, g'_2 \in G_2$  beliebige Elemente sind.

(a) Beweisen Sie, dass  $G_1 \times G_2$  mit dieser Verknüpfung wieder eine Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  nicht zyklisch ist. Sind die Gruppen  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  isomorph?

**Bemerkungen.** Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Namen und Übungsgruppe lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!