

# Lineare Algebra und Analytische Geometrie WS 2016-17, Blatt 5, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. (16 Punkte) (a) Bestimmen Sie alle Gruppenmorphismen  $\varphi : (S_n, \circ) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ .  
(b) Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $H \leq G$  eine Untergruppe mit  $|H| = |G|/2$ .  
Beweisen Sie, dass  $H$  Normalteiler von  $G$  ist.  
(c) Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $x \in G$ . Zu zeigen: für jeden  $k \in \mathbb{N}$ , gilt

$$\text{ord}(x^k) \mid \text{ord}(x).$$

2. (12 Punkte) Zeigen Sie, dass die Menge aller komplexen Zahlen

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] := \{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

ein Unterring von  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ist. Finden alle invertierbare Elemente  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ , d.h. Elemente, sodass ein Element  $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  mit  $x \cdot y = y \cdot x = 1$  existiert.

3. (12 Punkte) (a) Sei  $M$  eine Menge. Auf der Menge  $\mathcal{P}(M)$  aller Teilmengen von  $M$ , definiert man die symmetrische Differenz durch

$$A \Delta B := (A - B) \cup (B - A).$$

Beweisen Sie, dass  $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$  ein kommutativer Ring ist.

- (b) Sei  $R$  ein Ring, sodass  $a^3 + a = 0$ , für alle  $a \in R$ . Zeigen Sie, dass  $a^2 = a$ , für alle Elemente  $a \in R$ .

**Bemerkungen.** Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Namen und Übungsgruppe lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!