Lineare Algebra und Analytische Geometrie WS 2016/17, Blatt 6, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(16 Punkte)** (a) Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, beweisen Sie, dass

$$\frac{(a+bi)^2}{a-bi} + \frac{(a-bi)^2}{a+bi} \in \mathbb{R}.$$

(b) Berechnen Sie die komplexe Zahl $i^{21} + i^{295} + i^{77} + i^{2017}$.
(c) Finden Sie alle reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $(x+yi)^7 = 1+i$.
(d) Seien $z_1 = 1+\sqrt{3}i$ und $z_2 = 1-\sqrt{3}i$. Bestimmen Sie, $|z_1|, \arg(z_1), \arg(z_2), \arg(\frac{z_1}{z_2})$ und $\arg\sqrt{\frac{z_1}{z_2}}$.
(e) Berechnen Sie die komplexe Zahl $(1+i)^n + (1-i)^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

2. **(10 Punkte)** Führen Sie die Division mit Rest für die folgenden Polynomen mit Koeffizienten im $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

$$f(x) = \bar{2}x^4 + \bar{5}x^2 + \bar{3}x + \bar{6}, \quad g(x) = \bar{4}x + \bar{2}.$$

3. **(14 Punkte)** Sei G eine Gruppe. Definiert man ihr Zentrum als

$$Z(G) := \{x \in G : x \cdot g = g \cdot x, \text{ für alle } g \in G\}.$$

Zu zeigen:
(a) $Z(G)$ ist ein Normalteiler von G.
(b) Ist die Faktorgruppe $G/Z(G)$ zyklisch, dann ist G abelsch.
(c) Bestimmen Sie $Z(S_n)$, wobei $(S_n, \circ)$ die symmetrische Gruppe ist.

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Namen und übungsgruppe lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!