

# Lineare Algebra und Analytische Geometrie WS 2016/17, Blatt 7, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. (14 Punkte) (a) Lösen Sie die polynomiale Gleichung

$$\bar{3}x^2 - \bar{4}x + \bar{1} = \bar{0},$$

in  $\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{11}$  und  $\mathbb{F}_{13}$ .

- (b) Zeigen Sie, dass alle  $n$  Lösungen der polynomialen Gleichung

$$(x - i)^n + (x + i)^n = x^n$$

( $n \geq 3$ ) reelle Zahlen sind.

2. (10 Punkte) Sei  $D_4 := \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3\}$  die Diedergruppe der Ordnung 8, mit  $\sigma^4 = \tau^2 = 1$  und  $\tau\sigma^3 = \sigma\tau$ . Listen Sie alle Untergruppen von  $D_4$  auf.

3. (14 Punkte) (a) Finden Sie ein Polynom  $P(x) = ax^3 + bx^2 - 5x + 4 \in \mathbb{R}[x]$  mit der Eigenschaft, dass der Rest der Division von  $P(x)$  durch  $x + 1$  (bzw.  $x - 1$ ) 6 (bzw. 2) ist.

- (b) Finden Sie  $m, n \in \mathbb{R}$ , so dass  $2x^2 - x - 6 \in \mathbb{R}[x]$  das Polynom  $2x^4 + 5x^3 - 17x^2 + mx + n$  teilt.

- (c) Sei  $K$  ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass jede Abbildung  $\varphi : K \rightarrow K$  polynomial ist, d.h. es existiert  $f \in K[t]$  mit  $\varphi(a) = f(a)$ , für jedes  $a \in K$ .

**Bemerkungen.** Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Namen lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!