Lineare Algebra und Analytische Geometrie WS 2016-17, Blatt 8, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(16 Punkte)** Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

(a) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.
(b) $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$ im $\mathbb{R}^3$.
(c) $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\}$
(d) $f_1(x) = x^3 + 1, f_2(x) = x(x+1), f_3(x) = (x+1)^3$ in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. **(10 Punkte)** Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig

$$(1,3,4), (3,t,11), (-1,-4,0)?$$

3. **(14 Punkte)**

(a) Sei p eine Primzahl unf $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Gibt es eine $\mathbb{F}_p$-Vektorraumstruktur auf $(\mathbb{Z}, +)$?

(b) Sei K ein unedlicher Körper und V eine endliche Menge. Kann man auf V eine K-Vektorraumstruktur definieren?

4. **(14 Punkte)** Bestimmen sie alle Gruppenmorphismen

$$\phi : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot).$$

5. **(16 Punkte)** Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell, \beta \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die menge

$$V := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \alpha_1 f(1) + \cdots + \alpha_\ell f(\ell) = \beta\},$$

mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{C}$-Vektorraum bildet, genau dann wenn $\beta = 0$.

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Namen lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!