HU Berlin Sommersemester 2013

Übungsblatt 1
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 16.04.2013 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden komplexen Matrizen

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1-i & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 2i & 2i & 2i \\ 2i & 2 & -1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix},$$

und die folgende Matrix über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden $n \times n$ Matrizen durch Induktion über n:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

A sei $n \times n$ Matrix über einen Körper K, und es gebe eine Zerlegung von A in vier Teilmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

so dass B_{11} und B_{22} quadratische Matrizen sind.

(a) Zeigen Sie: Ist B_{12} oder B_{21} eine Nullmatrix, so gilt

$$\det(A) = \det(B_{11}) \det(B_{22}).$$

(b) Zeigen Sie: Ist B_{11} invertierbar, so gilt

$$\det(A) = \det(B_{11}) \det(B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12}).$$