HU Berlin Sommersemester 2017

Übungsblatt 11
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 04.07.2017 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe I (15 Punkte)

(a) Sei $(\mathcal{A}, V)$ ein reeller affiner Raum und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Falls $A, B \in \mathcal{A}$ Punkte sind, betrachtet man die Punkte in $\mathcal{A}$

$$C = \frac{1}{1-\lambda}A + \frac{\lambda}{\lambda - 1}B, \qquad D = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B.$$

Wenn $E = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D$, beweisen Sie, dass $\overrightarrow{EA} = \lambda^2 \cdot \overrightarrow{EB}$.

(b) Seien $A, B, C \in \mathcal{A}$ und $M, N, P \in \mathcal{A}$ Punkte, so dass

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PB}, \quad \overrightarrow{BM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MC} \text{ und } \overrightarrow{CN} = \lambda \cdot \overrightarrow{NA}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}M + \frac{1}{3}N + \frac{1}{3}P$$

Aufgabe II (15 Punkte)

Sei $(\mathcal{A}, V)$ ein affiner Raum und $V' \subset V$. Auf $\mathcal{A}$ definiert man die Relation:

$$P \sim Q \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{PQ} \in V'.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Faktormenge $\mathcal{A}/\sim$, mit zugehörigen Vektorraum V/V', die Struktur eienes affinen Raumes besitzt.

Aufgabe III (10 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden quadratische Formen auf $\mathbb{R}^3$

$$h_1(x, y, z) = 4xy, \quad h_2(x, y, z) = y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

äquivalent sind. Bestimmen Sie die Signatur von h_1 und h_2.