Übungsblatt 2
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 2.05.2017 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe 1

(a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen geometrischen und algebraischen Vielfachkeiten der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & -7 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) (8 Punkte) Diagonalisieren Sie die folgende Matrizen (falls möglich):

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

(a) (8 Punkte) Es seien V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ linear mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, dass 0 und 1 die einzigen Eigenwerte von f sind. Was sind die zu gehörigen Eigenräume?

(b) (7 Punkte) Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und lineare Abbildungen $f, g : V \to V$ mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie: Ist λ ein eigenwert von f und E der zugehörige Eigenraum, so gilt $g(E) \subset E$.

Aufgabe 3

(10 Punkte) Sei $A \in M(n, n : K)$ und $P_A(X)$ das charakteristische Polynom von A. Falls $P_A(0) \neq 0$, beweisen Sie, dass A invertierbar ist, und

$$P_{A^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n X^n}{P_A(0)} P_A\Big(\frac{1}{X}\Big).$$