# Übungsblatt 4
# Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 16.05.2017 vor der Vorlesung

**Bitte beachten:** Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

### Aufgabe 1

(a) (10 Punkte) Triagonalisieren Sie die folgenden reelle Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 3 \\ -7 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ -5 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie zuerst, dass es möglich ist und geben Sie die Matrix eines Basiswechsels an.

(b) (10 Punkte) Zwei Matrizen $A, B \in M(n, n, K)$ sind simultan trigonalisierbar, falls es eine Matrix $S \in GL(n, K)$ gibt, sodass $SAS^{-1}$ und $SBS^{-1}$ obere Dreiecksmatrizen sind. Aufgabe: Seien $A, B \in M(2, 2, K)$ triagonalisierebare Matrizen. Zeigen Sie, dass $A$ und $B$ genau dann simultan triagonalisierbar sind, wenn die Gleichung $(AB - BA)^2 = 0$ gilt.

### Aufgabe 2

(a) (10 Punkte) Sei $V$ ein $K$-Vektorraum der Dimension $n$. Zeigen Sie: Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ mit $f^2 = 0$ gilt

$$\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq \frac{n}{2}.$$

(b) (10 Punkte) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $2m \leq n$. Konstruieren Sie einen Endomorphismus $f : K^n \to K^n$ mit

$$f^2 = 0 \quad \text{und} \quad \dim(\mathrm{Bild}(f)) = m.$$