HU Berlin Sommersemester 2017

Übungsblatt 5
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 21.05.2017 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Partitionen der Zahl 6 und geben Sie die zugehörigen Kastendiagramme / Young-Diagramme an.

(b) Sei K ein Körper. Klassifizieren Sie mit Hilfe von (a) alle nilpotenten Endomorphismen $f : K^4 \to K^4$ (bis auf Ähnlichkeit).

(c) Zeigen Sie: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

entspricht der Partition $p = (2\ 2)$, d.h. die Matrizen A und $N((2\ 2))$ sind ähnlich, wobei

$$N((2\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix $S \in GL(4; \mathbb{R})$, für die gilt

$$S^{-1}AS = N((2\ 2)).$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ eine obere $(n \times n)$ - Matrix mit Koeffizienten in K, sei $a_{ii} = 0$ für $1 \le i \le n$. Dagegen sei $a_{i,i+1} \neq 0$ für $1 \le i < n$.

(a) Zeigen Sie: $\dim \operatorname{Ker}(f_A) = 1$.

(b) Folgere daraus: A ist ähnlich zu $N((n))$.

(c) Dazu ein Beispiel: Sei $K = \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix P mit $P^{-1}BP = N((n))$.