HU Berlin Sommersemester 2017

Übungsblatt 6
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 30.05.2017 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Minimalpolynome der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Sei $char(K) = 0$ un sei $m_T(x) = (x - \lambda)^2$ das Minimalpolynom vom $T \in \operatorname{End}_K(V)$ wobei $\lambda \in K$ beliebig ist. Zeigen Sie:

(i) Für jedes $g \in K[x]$ gilt: $g(T) = g(\lambda)I + g'(\lambda)(T - \lambda I)$.
(ii) Sei H die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $(H - I_2)^2 = 0$. Bestimmen Sie $\sum_{k=0}^{199} H^k$.

(c) Beweisen Sie: Falls das Minimalpolynom m_T von $T \in \operatorname{End}_K(V)$ eine Zerlegung $m_T = g \cdot h$ mit $\operatorname{ggT}(g, h) = 1$ besitzt, dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $V = \operatorname{Ker} g(T) \oplus \operatorname{Ker} h(T) =: U_1 \oplus U_2$.

(ii) U_1 und U_2 sind T-invariant. Ferner, U_1 und U_2 sind $r(T)$-invariant für ein beliebiges Polynom $r \in K[x]$. Damit sind die Endomorphismen $r(T)_{U_i} : U_i \to U_i$, für $i = 1, 2$, wohldefiniert.

Aufgabe 2 (17 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$, bezüglich der die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 12 & 0 \end{pmatrix} \in M(4, 4; \mathbb{R})$$

Jordansche Normalform hat.

(b) Sei K ein Körper. Sei $P(T) = (T - I)^3(T + I)^2$. Welche Jordanschen Normalformen treten bei 5×5-Matrizen mit Einträgen in K auf, deren charakteristisches Polynom P ist.

(c) Zeigen Sie: Zwei 5×5-Matrizen mit dem charakteristischen Polynom P sind genau dann ähnlich, wenn ihre Minimalpolynome übereinstimmen.

Aufgabe 3 (8 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $q(f) = 0$, wobei $q(t) = (t-1)^2(t-3)^4(t-5)$. Bestimmen Sie die explizite Zerlegung von V in $q_i(f)$-invariante Teilräume, wobei $q_1(t) = (t-1)^2$, $q_2(t) = (t-3)^4$ und $q_3(t) = t - 5$.