Übungsblatt 8
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 14.06.2017 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe I (20 Punkte)

(1) Wir definieren in $\mathbb{R}^3$ die bilineare Form

$$g(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

(a) Geben Sie die zu f gehörige quadratische Form q an.
(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{K}}(f)$ bezüglich der Kanonischenbasis.
(c) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}(f)$ bezüglich der Basis des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (1, 4, 9), (1, 8, 27)\}.$$

(2) Welche der folgenden Abbildungen $f : K^2 \to K$ sind Bilinearformen?

1. $f(x, y) = x + y$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2$
3. $f(x, y) = xy$
4. $f(x, y) = xy^2$

Aufgabe II (20 Punkte)

(1) Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum mit der Norm definiert durch

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

für alle $v, w \in V$. Beweisen Sie die Parallelogramgleichung

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2,$$

für alle $v, w \in V$.

(2) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $s : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform mit zugehörige quadratische Form $q : V \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$s(v, w) = \frac{1}{4}(q(v + w) - q(v - w) + iq(v + iw) - iq(v - iw))$$

gilt.

(3) Sei K ein Körper mit $char(k) \neq 2$ und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass jede Bilinearform $f : V \times V \to K$ eine eindeutige Zerlegung

$$f = f_1 + f_2$$

besitzt, wobei $f_1 : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und $f_2 : V \times V \to K$ eine schiefsymmetrische Bilinearform ist.