Übungsblatt 9
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. Gavril Farkas

Abgabetermin: 20.06.2017 vor der Vorlesung

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
Jedes Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Aufgabe I (20 Punkte)

(1) Wende das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt an.

(2) Es sei $V = \mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen, und es sei U der von den Vektoren $(2,1,0,3)^t$, $(4,2,1,-1)^t$, $(1,0,2,-13)^t$ erzeugte Untervektorraum von V. Bestimme eine Basis des zu U orthogonalen Untervektorraums $U^\perp$.

Aufgabe II (20 Punkte) (1) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einem Skalarprodukt $<,>$ und $(v_1, \dots, v_r)$ eine orthonormale Familie von Vektoren aus V. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $(v_1, \dots, v_r)$ ist eine Basis von V.

(ii) Für alle $v, w \in V$ gilt:

$$< v, w > = \sum_{j=1}^{r} < v, v_j > \cdot < v_j, w > .$$

(iii) Für alle $v \in V$ gilt:

$$||v||^2 = \sum_{j=1}^{r} | < v, v_j > |^2.$$

(iv) Für alle $v \in V$ gilt: Ist $< v, v_j > = 0$ für alle $j = 1, \dots, r$, so folgt $v = 0$.

(2) Sei B die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$ und $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

sowie die bilineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der folgenden Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Form $q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$q(v, w) := g(A(v), w).$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_C(q)$, wobei C die folgende Basis von $\mathbb{R}^3$ ist :

$$C := ({}^t(0, 1, -1), {}^t(2, 0, 1), {}^t(1, -3, -2)).$$