Blatt 2

Aufgabe 1

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & -7 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda & 1 \\ -8 & -7 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -7 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda)(3+\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+3)(\lambda(\lambda-4)+4)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+3)(\lambda-2)^2$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 1$: alg. Vielfachheit 1 $\Rightarrow$ geom Vielfachheit 1

$\lambda_2 = -3$: — " — 1 $\Rightarrow$ — " — 1

$\lambda_3 = 2$: — " — 2

geom Vielfachheit = dim ker $(A - \lambda_3 I)$

$$A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ -8 & -7 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Rang $(A - \lambda_3 I) = 1$

Dimensionsformel : dim ker $(A-\lambda_3 I)$ + Rang $(A - \lambda_3 I) = 3$

$\Rightarrow$ dim ker $(A - \lambda_3 I) = 2$

$\Rightarrow$ geom Vielfachheit $= 2$

b) $$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 & 7 \\ 6 & 2-\lambda & -6 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+5)(2-\lambda)(6-\lambda) + 7 \cdot 4 (2-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)(-(\lambda+5)(6-\lambda) + 28)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 30 + 28)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = 2$: $$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(A - \lambda_1 I) = 1$$

$\Rightarrow \dim \ker (A - \lambda_1 I) = 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow \dim \text{Eig}(2, A) = 2$
$\dim \text{Eig}(-1, A) = 1$ $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar

Basis für Eig(2, A):

$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_3 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$x_1 = x_3 = 0 \ \& \ x_2 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(2, A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Basis für $\text{Eig}(-1, A)$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -4x_1 + 7x_3 = 0$$

Wir wählen $x_1 = 7$

$\Rightarrow x_3 = 4$

$$\Rightarrow 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_3 - 3x_1 = -9$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(-1, A) = \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ d.h.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 2a & b-\lambda & a \\ 10 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(b-\lambda)(2-\lambda)$$

Fall 1: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = b \neq 2, -3$

$$\Rightarrow \dim \text{Eig}(-3, B) = \dim \text{Eig}(2, B) = \dim \text{Eig}(b, B) = 1$$

$$\Rightarrow SBS^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Fall 2: $b = -3$ d.h. $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$

$$\Rightarrow \dim \text{Eig}(2, B) = 1$$

Eig $(-3, B)$:

$$B-(-3)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(B-(-3)I) = 1$$

$$\Rightarrow \dim \ker(B-(-3)I) = 3-1 = 2 \quad \forall a$$

$$\cancel{\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ dim Eig $(-3, B) = 2 \Rightarrow B$ diagonalisierbar

$$\Rightarrow SBS^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Fall 3 : $b = 2$ d.h. $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$

und dim Eig $(-3, B) = 1$

Für Eig$(2, B)$:

$$B-2I = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Rang}(B-2I) = 1 \text{ falls } a = 0 \\ \text{Rang}(B-2I) = 2 \text{ falls } a \neq 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ dim ker $(B-2I) = 3-1 = 2$ falls $a = 0 \Rightarrow B$ diagonalisierbar
dim ker $(B-2I) = 3-2 = 1$ falls $a \neq 0 \Rightarrow B$ nicht diagonalisierbar

$$\Rightarrow \text{Falls } a = 0, \quad SBS^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) V endlich dimensionaler Vektorraum ; $f : V \to V$

$\dim V = n$ $\qquad f \circ f = f$

$v \neq 0$ Eigenvektor vom $f \Rightarrow f(v) = \lambda v$

$\Rightarrow f \circ f(v) = \lambda f(v)$

$\Rightarrow f(v) = \lambda^2 v$

$\Rightarrow \lambda v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda = \lambda^2$

$\Rightarrow \lambda = 0, 1$

$\lambda = 0 \Rightarrow Eig(0, f) = \{ v_0 \in V \mid f(v_0) = 0 \} = \ker f$.

$\lambda = 1 \Rightarrow$ Sei $A = (v_1 \; v_2 \dots v_n)$ die Matrix vom f
$v_i =$ Spaltenvektor

$\Rightarrow AA = A$ d.h.

$A(v_1 \dots v_n) = (v_1 \dots v_n)$

$\Rightarrow A v_i = v_i \quad \forall i = 1 \dots n.$

$\Rightarrow v_i \in Eig(1, f) \Rightarrow Im(f) \subseteq Eig(f)$

$\Rightarrow \dim Eig(1, f) \geq Rang(f)$

Aber $\dim Eig(1, f) \leq Rang(f)$ (bei Definition)

$\Rightarrow \dim Eig(1, f) = Rang(f) \Rightarrow Eig(1, f) = Im(f)$.

b) V endlich dimensionaler Vektorraum $f, g : V \to V$ lin. Abb
$f \circ g = g \circ f$

λ Eigenwert von f, $E = Eig(\lambda, f)$.

$v \in g(E) \Rightarrow v = g(v')$, $v' \in E$

$\Rightarrow \lambda v = g(\lambda v') = g \circ f(v') = f \circ g(v') = f(v)$

$\Rightarrow v \in E$.

Aufgabe 3 $\quad A \in M(n,n : K)$

$P_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det A \neq 0 \Rightarrow A$ invertierbar

Betrachte die Matrix $(A - XI)A^{-1}$.

$$\Rightarrow \bullet \ \det((A-XI)A^{-1}) = \det(A-XI)\det(A^{-1}) = \frac{P_A(X)}{\det A} = \frac{P_A(X)}{P_A(0)}.$$

$$\bullet \ \det((A-XI)A^{-1}) = \det(I - XA^{-1})$$

$$= \det\left(X \cdot \frac{1}{X} \cdot I - XA^{-1}\right)$$

$$= (-1)^n \cdot X^n \det\left(A^{-1} - \frac{1}{X} I\right)$$

$$Y = \frac{1}{X} \qquad = (-1)^n \frac{1}{Y^n} \det(A^{-1} - YI)$$

$$= (-1)^n \frac{1}{Y^n} P_{A^{-1}}(Y)$$

$$\Rightarrow (-1)^n \frac{1}{Y^n} P_{A^{-1}}(Y) = \frac{P_A\left(\frac{1}{Y}\right)}{P_A(0)}$$

$$\Rightarrow P_{A^{-1}}(Y) = \frac{(-1)^n Y^n P_A\left(\frac{1}{Y}\right)}{P_A(0)}.$$