Blatt 12

Aufgabe I

a) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$

Ebene $\mathcal{A}_2 = \langle A(1,2,3), B(5,-2,6), C(-3,2,1) \rangle$

Gerade $L = \langle D(7,-2,2), E(9,7,3) \rangle$

Für $\mathcal{A}_2$: $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 5 & -3 \\ x_2 & 2 & -2 & 2 \\ x_3 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$8x_1 - 4x_2 - 16x_3 + 48 = 0 \quad / :4$

$2x_1 - x_2 - 4x_3 + 12 = 0$

Für L: $\overrightarrow{DE} = (2, 9, 1)$

$x_1 = 7 + 2t$
$x_2 = -2 + 9t \quad \Rightarrow \quad x_1 - 2x_3 = 3$
$x_3 = 2 + t \qquad\qquad x_2 - 9x_3 = -2 - 18 = -20$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 - 3 = 0 \\ x_2 - 9x_3 + 20 = 0 \end{cases}$

$Q = \mathcal{A}_2 \cap L \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 12 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - 3 = 0 \\ x_2 - 9x_3 + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$x_3 = \frac{-9}{2}$

$x_1 = 2x_3 + 3 = -6$

$x_2 = 9x_3 + 20$
$= \frac{-81}{2} + 20$
$= \frac{-41}{2}$

b) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^4$ $\quad A(1,-1,0,1) \quad B(0,1,-1,0)$

$\quad C(1,0,-1,0)$

• Gerade durch A parallel zu BC

$$\overrightarrow{BC} = (1,-1,0,0)$$

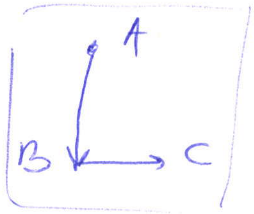
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 + 1 \cdot t \\ x_2 = -1 - t \cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 0 \cdot t \cdot 0 \\ x_4 = 1 + t \cdot 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \text{ oder } x_4 - 1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

• Ebene durch $P(1,2,0,2) \parallel \langle A, B, C \rangle$

$\langle A,B,C \rangle$



$\cdot P$

$$\langle A,B,C \rangle : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1,2,-1,-1) \\ \overrightarrow{BC} = (1,-1,0,0) \end{cases}$$

$$x_1 = 1 + t \cdot (-1) + u \cdot 1 = 1 - t + u$$

$$x_2 = 2 + 2t - 1 \cdot u = 2 + 2t - u$$

$$x_3 = 0 - 1 \cdot t + 0 \cdot u = -t$$

$$x_4 = 2 - 1 \cdot t + 0 \cdot u = 2 - t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ x_3 - x_4 + 2 = 0 \end{cases}$$

- die Hyperebene $H \ni P, A, B, C$

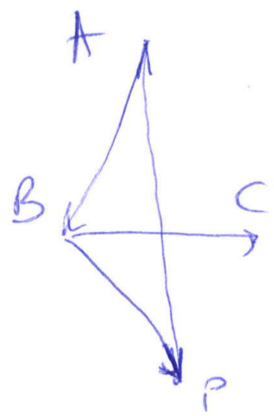
$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ x_4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 3 = 0$$

- die Hyperebene durch $M(-1,1,2,-1) \parallel H$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1,2,-1,-1) \\ \overrightarrow{BC} = (1,-1,0,0) \end{array}\right\} \in H$$

$\cancel{\overrightarrow{PA} = (0,-3,0,-1)}$

$\overrightarrow{BP} = (1,1,1,2)$



$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - t + u + v \\ x_2 &= 1 + 2t - u + v \\ x_3 &= 2 - t + 0u + v \\ x_4 &= -1 - t + 0u + 2v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 &= t + 2v \\ 4x_3 &= 8 - 4t + 4v \\ -3x_4 &= 3 + 3t - 6v \end{aligned} \Rightarrow x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 11 = 0$$

Aufgabe II $\mathcal{A} = (\mathbb{F}_5)^3$

- Wieviele Punkte $\in \mathcal{A}$?

  Sei $R = (O: e_1, e_2, e_3)$ ein Koordinatensystem von $\mathcal{A}$

  $\Rightarrow$ $\forall P \in \mathcal{A}$ hat Koordinaten (x_1, x_2, x_3) bzgl R,

  mit $x_i \in \mathbb{F}_5$

  $\Rightarrow$ $|\mathcal{A}| = 5^3 = 125$ Punkte

- Wieviele Geraden $\in \mathcal{A}$? $\dfrac{\binom{125}{2}}{\binom{5}{2}} = 775$ $\binom{125}{2} = \dfrac{125!}{2!\,123!} = \dfrac{124 \cdot 125}{2}$

- ~~Wieviele parallele Geraden zu einer fixierten Gerade?~~

- Wieviele Ebenen $\in \mathcal{A}$?

  Eine Ebene in $\mathcal{A}$ bzgl R hat Gleichung

  $$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \quad , \quad a_i \in \mathbb{F}_5$$

  und ammindestens eine von $a_i \neq 0$ für $i = 1, 2, 3$

  $\Rightarrow$ $5^4 - 5 = 620$ Ebenen $\in \mathcal{A}$. $/:4 \quad = 155$

- Wieviele Punkte $\in$ einer Ebene?

  Eine Ebene hat Gleichung $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$

  Nehmen wir an, dass $a_1 \neq 0$.

  Dann x_2, x_3 haben $5^2 = 25$ möglichen Werten

  und für jede (x_2, x_3) gibt es eine eindeutige

  $$x_1 = -\frac{1}{a_1}(a_0 + a_2 x_2 + a_3 x_3)$$

Aufgabe II $\mathcal{A} = (\mathbb{F}_5)^3$

- Wieviele Punkte $\in \mathcal{A}$?

Sei $R = (o, e_1, e_2, e_3)$ ein Koordinatensystem von $\mathcal{A}$
$\Rightarrow \forall\, P \in \mathcal{A}$ hat Koordinaten (x_1, x_2, x_3) bzgl R,
mit $x_i \in \mathbb{F}_5$. $\Rightarrow |\mathcal{A}| = 5^3 = 125$ Punkte

- Wieviele Geraden $\in \mathcal{A}$?

$$\frac{\binom{125}{2}}{\binom{5}{2}} = 775$$

- Wieviele Ebenen $\in \mathcal{A}$?

Eine Ebene in $\mathcal{A}$ bzgl R hat die Gleichung

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad a_i \in \mathbb{F}_5$$

und am mindestens eine von $a_i \neq 0$ für $i = 1,2,3$

$\Rightarrow 5^4 - 5 = 620$ Gleichungen

$\Rightarrow \frac{620}{4} = 155$ Ebenen $\in \mathcal{A}$

- Wieviele Punkte $\in$ eine Ebene?

Eine Ebene hat Gleichung $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$
Nehmen wir an, dass $a_1 \neq 0$.
Dann haben x_2, x_3 $5^2 = 25$ möglichen Werten

und für jede (x_2, x_3) gibt es eine eindeutige

$$x_1 = -\frac{1}{a_1}(a_0 + a_2 x_2 + a_3 x_3)$$

$\Rightarrow \exists$ 25 Punkte $(x_1, x_2, x_3) \in$ eine Ebene in $\mathcal{A}$

- Wieviele Geraden $\in$ eine Ebene?

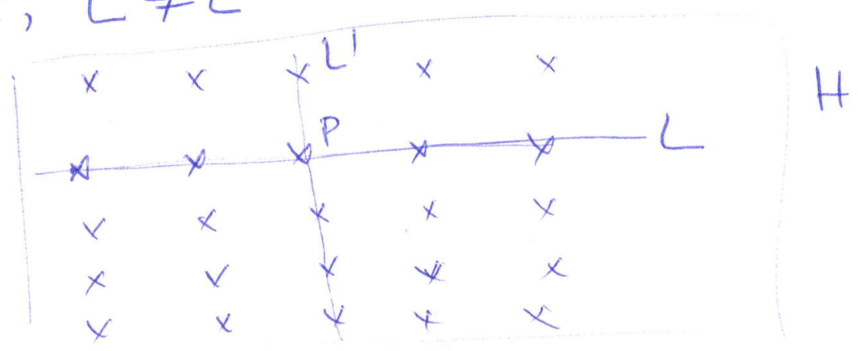
  Eine Ebene enthält 25 Punkte $\Rightarrow \dfrac{\binom{25}{2}}{\binom{5}{2}} = 30$ Geraden

- Wieviele Ebenen $H \in \mathcal{A}$ sodass die Gerade $L \in H$?

$$\frac{\overbrace{155}^{\#\text{Ebenen} \in \mathcal{A}} \cdot \overbrace{30}^{\#\text{Gerade} \in \text{einer Ebene}}}{\underbrace{775}_{\#\text{Geraden} \in \mathcal{A}}} = 6$$

- Wieviele parallele Geraden zu einer fixierten Gerade L?

  - Durch eine Gerade L gehen 6 Ebenen (von oben)
  - Jede solche Ebene H enthält 25 Punkte
  - Sei $P \in L$ ein Punkt $\Rightarrow \exists \ \frac{20}{4} = 5$ Geraden $L' \subset H$ mit $P \in L'$, $L' \neq L$



$\Rightarrow \exists$ 25 Geraden $L' \subset H$ mit $L' \neq L$
$L' \cap L \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists \; 30 - 25 - 1 = \underbrace{4}_{\text{parallele zu } L}$ Geraden im H

$\Rightarrow \exists \; 6 \cdot 4 = 24$ ~~paralle~~ Geraden parallele zu L

- Wieviele windschiefe Geraden zu einer fixierten Gerade?

\# windschiefe Geraden zu L =

= \# Geraden im $\mathcal{A}$ − \# Geraden parallele zu L
− \# Geraden L' mit $L' \cap L \neq \emptyset$
− 1

\# Geraden L' mit $L' \cap L \neq \emptyset$:

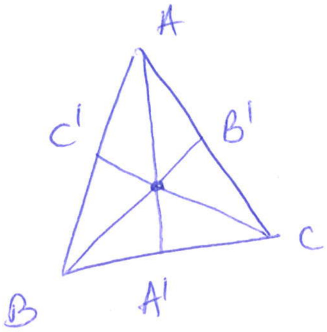
$\exists \; \frac{125-5}{4} = 30$ Geraden durch $P \in L$

$\Rightarrow 5 \cdot 3 = 150$ Geraden L' mit $L' \cap L \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ \# windschiefe Geraden zu L =

$= 775 - 150 - 24 - 1 = 600$

Aufgabe III



z.z. $(A,B|C')(B,C|A')(C,A|B') = 1$

$$\underbrace{(A,B|C')}_{=\lambda}\ \underbrace{(B,C|A')}_{=\mu}\ \underbrace{(C,A|B')}_{=\nu}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \lambda \overrightarrow{C'B} \Rightarrow C' = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{\lambda+1}B \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{BA'} = \mu \overrightarrow{A'C} \Rightarrow A' = \frac{1}{1+\mu}B + \frac{\mu}{1+\mu}C \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{CB'} = \nu \overrightarrow{B'A} \Rightarrow B' = \frac{1}{1+\nu}C + \frac{\nu}{\nu+1}A \qquad (3)$$

AA', BB', CC' schneiden sich in einem Punkt $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ so dass

$$\alpha_A A + (1-\alpha_A)A' = \alpha_B B + (1-\alpha_B)B' = \alpha_C C + (1-\alpha_C)C'$$

$$\overset{(1),(2),(3)}{\Rightarrow} \quad \alpha_A A + \frac{1-\alpha_A}{1+\mu}B + \frac{(1-\alpha_A)\mu}{1+\mu}C \overset{(*)}{=} \alpha_B B + \frac{1-\alpha_B}{1+\nu}C + \frac{\nu(1-\alpha_B)}{1+\nu}A$$

$$\overset{(**)}{=} \alpha_C C + \frac{1-\alpha_C}{1+\lambda}A + \frac{\lambda(1-\alpha_C)}{1+\lambda}B$$

$$(*) + A \Rightarrow \quad \frac{1-\alpha_A}{1+\mu}\overrightarrow{AB} + \frac{(1-\alpha_A)\mu}{1+\mu}\overrightarrow{AC} = \alpha_B \overrightarrow{AB} + \frac{1-\alpha_B}{1+\nu}\overrightarrow{AC}$$

$$(**) + A \Rightarrow \quad \frac{1-\alpha_A}{1+\mu}\overrightarrow{AB} + \frac{(1-\alpha_A)\mu}{1+\mu}\overrightarrow{AC} = \alpha_C \overrightarrow{AC} + \frac{\lambda(1-\alpha_C)}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1-\alpha_A}{1+\mu} - \alpha_B\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{(1-\alpha_A)\mu}{1+\mu} - \frac{1-\alpha_B}{1+\nu}\right)\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left(\frac{1-\alpha_A}{1+\mu} - \frac{\lambda(1-\alpha_C)}{\lambda+1}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{(1-\alpha_A)\mu}{1+\mu} - \alpha_C\right)\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

A, B, C affint oberoende $\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\dfrac{1-\alpha_A}{1+\mu}=\alpha_B\\[2ex]\dfrac{(1-\alpha_A)\mu}{1+\mu}=\dfrac{1-\alpha_B}{1+\nu}\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha_A=\dfrac{1}{1+\lambda+\mu\lambda}\\[6ex]\left.\begin{array}{l}\dfrac{1-\alpha_A}{1+\mu}=\dfrac{\lambda(1-\alpha_C)}{\lambda+1}\\[2ex]\dfrac{(1-\alpha_A)\mu}{1+\mu}=\alpha_C\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha_A=\dfrac{\nu\mu}{1+\mu+\nu\mu}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+\lambda+\mu\lambda}=\frac{\nu\mu}{1+\mu+\nu\mu}$$

$$\Rightarrow \cancel{\nu\mu}+\nu\mu\lambda+\nu\mu^2\lambda=1+\mu+\cancel{\nu\mu}$$

$$\nu\mu\lambda(1+\mu)=1+\mu \quad \Rightarrow \boxed{\nu\mu\lambda=1}$$