Blatt 4

Aufgabe 1

a) $A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 3 \\ -7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda-4)(\lambda-1)^2$

$\Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4. \end{matrix} \Rightarrow A$ ist trigonalisierbar

$Eig(1, A)$: $\dim Eig(1, A) = ? \leq 2.$

$A - I = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 7 \\ -3 & 3 & 3 \\ -7 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ -7 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

und $Rang(A - I) = 2 \Rightarrow \dim Eig(1, A) = 1$

$\Rightarrow A$ nicht diagonalisierbar.

$Eig(4, A)$: $\dim Eig(4, A) = 1$

$A - 4I = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 7 \\ -3 & 0 & 3 \\ -7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \overset{z_1 - z_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ -7 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Für Trigonalisierung brauchen wir einen Vektor v_3 lin. unab mit v_1, v_2. Wir nehmen $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ -5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad P_B(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2-13\lambda+76)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{13 \pm 3i\sqrt{15}}{2}$$

$\Rightarrow$ B nicht trigonalisierbar auf $\mathbb{R}$.

b) $A, B \in M(2{,}2, K)$ trigonalisierbar

A, B simultan trigonalisierbar $\Leftrightarrow (AB-BA)^2 = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ A, B simultan trig $\Rightarrow \exists\, S \in GL(n,K)$ so dass SAS^{-1} und SBS^{-1} obere Dreiecksmatrizen sind.

$$S(AB-BA)S^{-1} = SAS^{-1}SBS^{-1} - SBS^{-1}SAS^{-1}$$

$\Rightarrow S(AB-BA)S^{-1}$ Dreiecksmatrix.

$$\mathrm{Tr}(S(AB-BA)S^{-1}) = \mathrm{Tr}(AB-BA) = 0.$$

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \qquad SBS^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(AB-BA)S^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ die Eigenwerten vom $AB-BA$ sind alle null

Cayley-Hamilton : $(AB-BA)^2 = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $(AB-BA)^2 = 0 \xRightarrow{\text{Aufgabe 2a}}$ Rang $(AB-BA) \leq 1$

z.z. $\exists\ S \in M(2,2,k)$ ~~so~~ dass SAS^{-1}, SBS^{-1} obere Dreiecksmatrizen.

$\Leftrightarrow$ $\exists\ v$ sodass v Eigenvektor für A und B ist.

Sei $C = AB - BA$.

- $\ker A = 0$: Sei ~~$A \neq A$~~ v ein Eigenvektor vom A, $Av = \lambda v$
  Dann $A' = A - \lambda I$ hat $\ker A' \neq 0$
  und $SA'S^{-1} = S(A - \lambda I)S^{-1} = SAS^{-1} - \lambda I$
  ist auch eine obere Dreiecksmatrix $\Rightarrow$ wir können immer
  ~~annehmen~~ $\ker A \neq 0$ einnehmen, d.h. $\dim \ker A = 1$.

- $\ker A \subseteq \ker C$: $Av = 0 \Rightarrow Cv = 0$ d.h.
  $(AB - BA)v = 0$ d.h. $ABv = 0$
  $\Rightarrow Bv \in \ker A \Rightarrow Bv = \lambda' v$
  $\Rightarrow v$ Eigenvektor für A und B

- $\ker A \not\subseteq \ker C$: $\exists\ v \in \ker A$, $Av = 0$ so dass
  $Cv \neq 0$.
  $\Rightarrow \operatorname{Im} C = \langle Cv \rangle$ (weil $\dim \operatorname{Im} C = 1$)

$Cv = (AB - BA)v = A(Bv) \Rightarrow Cv \in \operatorname{Im} A$.

zz $B : \operatorname{Im} A \longrightarrow \operatorname{Im} A$

$Bw = B(Av') = ABv' - Cv' = ABv' - \mu \underbrace{Cv}_{\in \operatorname{Im} A}$ $\in \operatorname{Im} A$

Aber $\dim \operatorname{Im} A = 1 \Rightarrow Bw = \lambda'' w$ und $Aw = \lambda''' w$

Aufgabe 2

a) V K-Vektorraum der Dimension n

$f: V \to V$, $f^2 = 0$

z.z. $\dim(\operatorname{Im} f) \leq \frac{n}{2}$.

$f^2 = 0 \Rightarrow f(f(v)) = 0 \quad \forall\, v \in V \Rightarrow \operatorname{Im}(f) \subseteq \ker(f)$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(f) \leq \dim \ker f$.

Dimensionsformel: $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = n$

$n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f \geq 2 \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) \leq \frac{n}{2}$.

b) $m, n \in \mathbb{N}$, $2m \leq n$

$f: K^n \to K^n$ mit $f^2 = 0$, $\dim \operatorname{Im} f = m$.

n gerade:
$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit m $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Blöcken

n ungerade,
$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit m $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Blöcken