Blatt 7

Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad p_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)^2$$
$$m_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)^2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a) $A \in M(n,n,K)$ ZZ $A \sim A^t$

Sei $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ \cdot & & & 1 \\ \cdot & & & \lambda \end{pmatrix}$ ein $n \times n$ Jordan Block

Dann: $J_\lambda \sim J_\lambda^t$: $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\text{tauscht Zeilen}} J_\lambda \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}}^{=:C} = J_\lambda^t$

tauscht Spalten

und $C = C^{-1}$!

Sei S die Matrix so dass $SAS^{-1} = J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & J_{\lambda_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \Big| ^t$

$$\Rightarrow (SAS^{-1})^t = (S^t)^{-1} A^t S^t = J^t = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^t & & \\ & J_{\lambda_2}^t & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \sim J \sim J^t \sim A^t \Rightarrow A \sim A^t.$$

b) V endlich dimensionaler Vektorraum, $f \in End_K(V)$

z.z. $U \leq V \Rightarrow m_{f|U} \mid m_f$

$m_f(f) = 0$ ~~auf~~ $V \Rightarrow m_f(f) = 0$ auf $U \Rightarrow m_f(f|U) = 0$.

Sei $m_{f|U}$ das Minimalpolynom von $f|U$, $m_{f|U} \nmid m_f$

$$m_f(x) = m_{f|U}(x)\, q(x) + r(x), \quad \deg(r) < \deg m_{f|U}.$$
$$r(x) \neq 0$$

$$r(x) = m_f(x) - m_{f|U}(x)\, q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(f|U) = m_f(f|U) - m_{f|U}(f|U)\, q(f|U) = 0 - 0 = 0$$

Sei α der Koeffizient der höchsten Potenz (Monom) im ~~…~~ $r(x) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} r(x)$ ist ein normiertes Polynom mit $\deg\left(\frac{1}{\alpha} r(x)\right) = \deg(r(x))$ und $\frac{1}{\alpha} r(f|U) = 0$

aber $m_{f|U}$ hat minimalen Grad $\Rightarrow$ ↯ $\Rightarrow m_{f|U} \mid m_f$.

c) $V := \{ f \in k[x] \mid \deg(f) \leq 3 \}$, $T: V \to V$
$T(f) = x f''(x)$

Sei B die Basis $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ für V

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = x f'(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2)$$
$$= x(2a_2 + 6a_3 x)$$
$$= 2a_2 x + 6a_3 x^2$$

$$\Rightarrow M_T(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 a) $A \in M(3,3,\mathbb{Q})$, $A^8 = I_3$
$A^4 \neq I_3$

$\cancel{x^8 - 1 = (x^4-1)(x^4+1) = 0 \Rightarrow x^4 + 1 = 0}$
$\cancel{x^4 - 1 \neq 0}$

$\cancel{A^8 - I = (A^4 - I)(A^4 + I) = 0}$
$\cancel{A^4 - I \neq 0}$

~~Nehmen wir an, dass $A \in M(3,3,\mathbb{C})$~~

$A^8 - I = 0 \Rightarrow m_A(x) \mid x^8 - 1$

$$\left.\begin{matrix} x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1) \\ A^4 \neq I \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_A(x) \mid (x^4 + 1)$$

$x^4 + 1 = (x - \lambda_1)(x - \bar{\lambda}_1)(x - \lambda_2)(x - \bar{\lambda}_2) \Rightarrow \lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2$
sind alle Eigenwerte von A #

b) $K = \mathbb{F}_p \qquad A \in M(n,n,K) \qquad A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \dots & \bar{1} \\ \vdots & & \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \dots & \bar{1} \\ & \vdots & & \\ \bar{1} & \bar{1} & \dots & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \vdots \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \vdots \\ \bar{n} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} p \mid n \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \vdots \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} \\ p \nmid n \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \vdots \\ \bar{n} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

$p \mid n$: $\quad A^2 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \dots & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \dots & \bar{1} \\ \vdots & & \\ \bar{1} & \bar{1} \dots & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \dots & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \dots & \bar{1} \\ \vdots & & & \\ \bar{1} & \bar{1} & \dots & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n} & \bar{n} \dots & \bar{n} \\ \bar{n} & \bar{n} \dots & \bar{n} \\ \vdots & & \\ \bar{n} & \bar{n} \dots & \bar{n} \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \mu_A(x) \mid x^2 \quad \Rightarrow \quad \mu_A(x) = x^2.$$

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \dots & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ & \vdots & \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Eig}(A,0) = n-1$$

$$\Rightarrow \quad A \sim \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & & \\ \bar{0} & \bar{0} & & \\ & & \bar{0} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$p \nmid n$: $\quad \mu_A(x) \mid x(x-\bar{1}) \quad \Rightarrow \mu_A(x) = x(x-\bar{1})$

$$\Rightarrow \quad A \sim \begin{pmatrix} \bar{0} & & & & \\ & \bar{0} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \bar{0} & \\ & & & & \bar{1} \end{pmatrix}$$