

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II Probeklausur

Prof. Dr. Gavril Farkas

Aufgabe 1

Sei $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die linear Abbildung gegeben durch $T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$, wobei

$$y_1 = -x_1 + x_2 + 2x_3, \quad y_2 = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3, \quad y_3 = 2x_1 + x_2 + x_3.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von T und die zugehörigen Eigenräume. Bestimmen Sie ob T diagonalisierbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

1. Beweisen Sie, dass die Vektoren $v_1 = (1, 2, 2), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (0, 1, 0)$ eine Basis von \mathbb{R}^3 bilden, und finden Sie die zugehörige Orthonormalbasis die durch das Gram-Schmidt Verfahren entstanden ist.
2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$T(x, y) := (\alpha x + (\alpha + 1)y, x + \beta y)$$

orthogonal ist, genau dann wenn $\alpha = \beta = 0$.

Aufgabe 3

1. Seien $A = (1, 0, 0), B = (2, 3, 1), C = (0, 5, 5), D = (5, 1, -3)$ vier Punkte in \mathbb{R}^3 . Finden Sie die Gleichungen, die die Geraden L_{AB}, L_{CD} durch den Punkten A, B bzw. C, D definieren. Wenn es existiert, finden Sie auch der Schnittpunkt zwischen L_{AB} und L_{CD} .
2. Im affinen Raum $\mathcal{A}_3 = \mathbb{R}_3$, bestimmen Sie die parametrische Gleichung des affinen Unterraums (\mathcal{A}'_2, V') der den Punkt $P = (2, 1, -1) \in \mathbb{A}_3$ enthält und den entsprechende Vektorraum V'' von den Vektoren $\vec{v}_1 := 3e_1 + e_2 + e_3 = (3, 1, 1)$ und $\vec{v}_2 := e_1 - e_2 + 2e_3 = (1, -1, 2)$ erzeugt ist.

Aufgabe 4

1. Zeigen Sie, dass die quadratische Form $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$q(x_1, x_2, x_3) := 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1 - 2x_3$$

positiv definit ist, d.h. $q(v) > 0$, für jeden $v \in \mathbb{R}^3$.

2. Sei $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ die quadratische Form gegeben durch

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) := x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4.$$

Bestimmen Sie die kanonische Darstellung von q sowie eine Basis in \mathbb{R}^4 in der diese Darstellung gilt.

Aufgabe 5

1. Sei $A \in M(n, n : K)$ eine Matrix und $m_A(t)$ bzw. $P_A(t) \in K[t]$, das Minimal- bzw. charakteristische Polynom von A . Zu zeigen: $m_A | P_A$ und $P_A | m_A^n$.
2. Sei (\mathcal{A}, V) ein affiner Raum über einen Körper K . Sei $\lambda \in K$ ein Skalar und seien $P, Q \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestimmten Punkt $R \in \mathcal{A}$ gibt, so dass für jeden Punkt $O \in \mathcal{A}$, gilt:

$$\vec{OR} = (1 - \lambda)\vec{OP} + \lambda\vec{OQ} \in V.$$

Aufgabe 6

Seien P_1, P_2, P_3 affin unabhängige Punkten in einem Affinraum (\mathcal{A}, V) . Sei $Q_1 \in P_1P_2$ der Punkt mit $(P_1, P_2 | Q_1) = \lambda$, wobei $\lambda \in K$ ein Skalar ist, und $Q_2 \in P_1P_3$ der Punkt mit $(P_1, P_3 | Q_2) = \lambda$. Endlich, sei Q_3 der Mittelpunkt des Segmentes P_2P_3 , d.h. $Q_3 = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3$. Zeigen Sie, dass die folgenden affinen Geraden in \mathcal{A}

$$Q_1P_3, Q_2P_2 \quad \text{und} \quad Q_3P_1$$

in einem Punkt sich treffen.

Aufgabe 7

Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

über dem Körper \mathbb{R} und \mathbb{F}_2 und bestimme jeweils die Jordan-Normalform.