

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I+II 2009, Klausur

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$y_1 = x_1 + 2x_2,$$

$$y_2 = 2x_2,$$

$$y_3 = -2x_2 + x_3.$$

1. Finden Sie alle Eigenwerte von f und die zugehörigen Eigenräumen.
2. Bestimmen Sie, ob f diagonalisierbar ist.
3. Bestimmen Sie, ob die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g(x_1, x_2, x_3) := (4x_1 + 5x_2 - 2x_3, -2x_1 - 2x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_3),$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2

1. Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$ Elemente, so dass $x^3 = e$ und $xyx^{-1} = y^3$. Zeigen Sie, dass $y^{26} = e$.
2. Sei G eine Gruppe und $a \in G$ ein Element, so dass die Differenzmenge $G - \{a\}$ eine Untergruppe von G ist. Zeigen Sie, dass G nicht drei verschiedene Elemente enthalten kann, insbesondere $G \cong \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 3

Im affinen Raum \mathcal{A}_3 betrachtet man die Punkte

$$A(1, -1, 0, 1), B(0, 1, -1, 0), C(1, 0, -1, 0) \text{ und } D(1, 2, 0, 1).$$

1. Bestimmen Sie die Gleichung der affinen Ebene $H \subset \mathcal{A}_3$ mit $A, B, C, D \in H$.
2. Beschreiben Sie die Gerade $\mathbf{BC} \subset \mathcal{A}_3$. Geben Sie ihre parametrische Darstellung.
3. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden $L \subset \mathcal{A}_3$, so dass $A \in L$ und L parallel zu der Gerade \mathbf{BC} .

4. Im affinen Raum \mathcal{A}_4 betrachtet man die Geraden $L_1, L_2, L_3 \subset \mathcal{A}_4$ gegeben durch:

$$L_1 : x_1 + x_3 - 1 = 0, x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 1 = 0, x_2 - x_4 = 0,$$

$$L_2 : \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3 - 2}{1} = \frac{x_4 + 1}{1},$$

und

$$L_3 : x_1 = 1 + t, x_2 = 1 - t, x_3 = 2 + t, x_4 = -1 - t, t \in \mathbb{R}.$$

Finden Sie eine affine Gerade $L \subset \mathcal{A}_4$ mit der Eigenschaft $L \cap L_i \neq \emptyset$, for $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 4

1. Welche der folgenden Matrizen in $M(2, 2 : \mathbb{R})$ sind orthogonal?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

2. Sei $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$T(x, y, z) := \left(\frac{1}{3}(2x + y - 2z), \frac{1}{3}(-2x + 2y - z), \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) \right).$$

Zeigen Sie, dass T eine Drehung in \mathbb{R}^3 ist. Finden Sie die Drehungsachse und den Drehungswinkel von T .