Lineare Algebra und analytische Geometrie II: Blatt 11

Abgabe: Nie

Aufgabe 1 Seien $(\mathcal{A}, V, \phi)$ und $(\mathcal{B}, M, \psi)$ affine Räume, und sei $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine affine Abbildung. Beweisen Sie:

1. Sind U_1', U_2' parallele Unterräume von $\mathcal{B}$, so sind $f^{-1}(U_1')$, $f^{-1}(U_2')$ parallele Unterräume von $\mathcal{A}$.
2. Sind $P, Q, R \in \mathcal{A}$ kollinear, so auch $f(P), f(Q), f(R)$.
3. Sind $P, Q, R \in \mathcal{A}$ kollinear, und ist $f(P) \neq f(Q)$, dann ist $(P, Q : R) = (f(P), f(Q) : f(R))$.

Aufgabe 2
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Für A und B bestimmen Sie jeweils den Posivitätsindex und die Signatur.
2. Untersuchen Sie, ob A und B kongruent sind. (Bemerken Sie, zwei Matrizen A und B heissen *kongruent*, wenn sie bezüglich geeigneter Basen dieselbe Bilinearform darstellen, aber im Fall A, B symmetrisch sind, es gibt angenehmer äquivalente Varianten dieser Definition.)
3. A und B beschreiben Skalarprodukte im $\mathbb{R}^3$ (diese Aussage dürfen Sie annehmen). Untersuchen Sie jeweils, ob diese Skalarprodukte positiv definit sind.

Aufgabe 3
Im $\mathbb{R}^2$ sei (bezüglich der kanonischen affinen Basis $(0, e_1, e_2, e_3)$) der Kegelschnitt Q durch die untenstehende Gleichung gegeben. Geben Sie den Typ von Q an, berechnen Sie die Normalform von Q und geben Sie die affine Basis an, bezüglich welcher Q diese Normalform hat. Sei $Q = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : -y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{2}xy + 4z = 9\}$.

1. $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 3x_2 + 4 = 0$
2. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + \sqrt{2}(x_1 - x_2) = 0$, und, für $Q \subseteq \mathbb{R}^3$,
3. $-x_2^2 - 2x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 4x_3 - 9 = 0$

Aufgabe 4
Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei F eine alternierende Bilinearform, so dass es existiert $v_1, v_2 \in V$ mit $F(v_1, v_2) \neq 0$.

1. Beweisen Sie: $\{v_1, v_2\}$ ist linear unabhängig, und deshalb besitzt eine Basiserweiterung $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ von V.

2. Seien $w_1, w_2, \ldots, w_n$ die Vektoren

$$w_1 = v_1, \qquad w_2 = \frac{1}{F(v_1, v_2)} v_2$$

   und, für $i \geq 3$,

$$w_i = v_i + F(w_2, v_i) w_1 - F(w_1, v_i) w_2.$$

   Beweisen Sie: $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ist eine Basis von V.

3. Berechnen Sie die erste zwei Reihen und Spalten der Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basis $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$.

4. Beweisen Sie: es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass bezüglich $\mathcal{B}$, die Matrixdarstellung der Bilinearform F die Gestalt

$$\begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \ldots & & B_r \end{pmatrix}.$$

   hat, wobei jede Untermatrix B_i ist entweder die 1×1 Nullmatrix, oder die 2×2 Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$