Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*
Blatt 2

Aufgabe 1
Sei K ein Körper. Seien $A, B \in M(n \times n; K)$ Matrizen und bezeichne $[A, B] := AB - BA$ ihren Kommutator.

(a) Zeigen Sie: Sind A und B nilpotente Matrizen mit $[A, B] = 0$, so ist auch $A + B$ eine nilpotente Matrix.

(b) Geben Sie jeweils ein Beispiel für nilpotente Matrizen A und B mit $[A, B] \neq 0$ an, so dass $A + B$ nilpotent, bzw. nicht nilpotent ist.

(c) Zeigen Sie: Gilt $[[A, B], A] = 0$, dann ist $[A, B]$ nilpotent.

Aufgabe 2
Sei K ein Körper.

(a) Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n. Zeigen Sie: Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ mit $f^2 = 0$ gilt
$$\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq \frac{n}{2}.$$

(b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $2m \leq n$. Konstruieren Sie einen Endomorphismus $f : K^n \to K^n$ mit
$$f^2 = 0 \ \text{ und } \ \dim(\mathrm{Bild}(f)) = m.$$

Aufgabe 3

(a) Bestimmen Sie alle Partitionen der Zahl 4 und geben Sie die zugehörigen Kastendiagramme/Young-Diagramme an.

(b) Sei K ein Körper. Klassifizieren Sie mit Hilfe von (a) alle nilpotenten Endomorphismen $f : K^4 \to K^4$ (bis auf Ähnlichkeit).

(c) Zeigen Sie: Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$$
entspricht der Partition $p = (2\,2)$, d.h. die Matrizen A und $N((2\,2))$ sind ähnlich, wobei
$$N((2\,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{R}).$$
Bestimmen Sie die Matrix $S \in \mathrm{GL}(4; \mathbb{R})$, für die gilt
$$S^{-1}AS = N((2\,2)).$$

Aufgabe 4
Sei K ein Körper und $A \in M(n \times n; K)$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom $p_A(t) \in K[t]$. Der *Satz von Cayley-Hamilton* besagt:

$$p_A(A) = 0.$$

(a) Beweisen Sie den Satz von Cayley-Hamilton für $n = 2$.

(b) Beweisen Sie den Satz von Cayley-Hamilton für Diagonalmatrizen $A \in M(n \times n; K)$.

(c) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ von der Form

$$p_A(t) = t^n - \mathrm{Spur}(A) \cdot t^{(n-1)} + (\text{übrige Terme}) + (-1)^n \det(A)$$

ist, und benutzen Sie den Satz von Cayley-Hamilton, um einen Ausdruck für die Matrix A^{-1} herzuleiten, in welchem A, $\det(A)^{-1}$ und andere Koeffizienten von $p_A(t)$ vorkommen.
(Hinweis: Die Spur von $A = (a_{jk})$ ist die Summe der Diagonaleinträge von A, d.h. es gilt $\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.)

Bemerkung: Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Namen lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!