Lineare Algebra und and analytische Geometrie II, Blatt 1

1. Bestimme alle Elemente $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, für welche die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist, und bestimme gegebenfalls ihre Eigenwerte.

2. Sei K ein Körper, $n \geq 1$ unde seien $A, B \in M(n, n : K)$.

- Sei $L_A : M(n, n, K) \to M(n, n, K)$ die lineare Abbildung, die durch $L_A(X) = AX$ definiert ist. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von L_A in Abhängigkeit von den Eigenwerten und den Eigenräumen von A.

- Sei $R_A : M(n, n, K) \to M(n, n, K)$ die lineare Abbildung, die durch $R_A(X) = XA$ definiert ist. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von R_A in Abhängigkeit von den Eigenwerten und den Eigenräumen von A.

- Sei $\phi_{A,B} : M(n, n, K) \to M(n, n, K)$ durch $\phi_{A,B}(X) = AXB$ definiert. Fall λ (bzw. μ) ein eigenwert von A (bzw. von B) ist, zeige das $\lambda\mu$ ein Eigenwert von $\phi_{A,B}$ ist. Erhält man auf diese Weise alle Eigenwerte von $\phi_{A,B}$?

3. Trigonalisiere die folgenden reelle Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 3 \\ -7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ -5 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Zeige zuerst, dass es möglich ist und gib die Matrix eines Basiswechsels an.

4. Zwei Matrizen $A, B \in M(n, n, K)$ sind simultan trigonalisierbar, falls es eine Matrix $S \in GL(n, K)$ gibt, sodass SAS^{-1} und SBS^{-1} obere D reiecksmatrizen sind.

Aufgabe: Seien $A, B \in M(2, 2, K)$ trigonalisiebare Matrizen. Zeigen Sie, dass A und B genau dann simultan trigonalisierbar sind, wenn die Gleichung $(AB - BA)^2 = 0$ gilt.

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Namen lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!