Lineare Algebra und analytische Geometrie II: Blatt 4

Abgabe 20.05.2009

Aufgabe 1

Gegeben seien folgende Matrizen aus $\mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Begründen Sie die Ähnlichkeit obiger Matrizen über $\mathbb{C}$, sowie die Ähnlichekeit von M_2 und M_3 über $\mathbb{R}$.
2. Sei $A := \{a_1, a_2, \overline{a_1}, \overline{a_2}\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^4$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$ mit $M_A^A(f) = M_1$. Bestimmen Sie Basen B, C von $\mathbb{C}^4$ mit $M_B^B(f) = M_2$ und $M_C^C(f) = M_3$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$, bezüglich der die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 12 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Jordansche Normalform hat. Sie dürfen dabei ohne Beweis benutzen, dass das charakteristische Polynom von A durch $P_A(x) = (x-2)^4$ gegeben ist.

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 3

Sei $P(T) = (T-1)^3(T+1)^2$.

1. Welche Jordanschen Normalformen treten bei 5×5-Matrizen mit Einträgen in K auf, deren charakteristisches Polynom P ist.
2. Zeigen Sie: Zwei 5×5-Matrizen mit dem charakteristischen Polynom P sind genau dann ähnlich, wenn ihre Minimalpolynome übereinstimmen.

Aufgabe 4

Sei $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0$ ein normiertes Polynom über K und sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

die zugehörige Begleitmatrix. Zeigen Sie:

1. Das charakteristisches Polynom von A ist P.
2. Für jeden Eigenwert λ von A hat der zugehörige Eigenraum die Dimension 1.

Wie sieht also die Jordansche Normalform von A für den Fall aus, dass $P(T)$ in Linearfaktoren zerfällt?