Lineare Algebra und and analytische Geometrie II, Blatt 5

1. Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass jede Bilinearform $f : V \times V \to K$ eine eindeutige Zerlegung

$$f = f_1 + f_2$$

besitzt, wobei $f_1 : V \times V \to K$ eine symmetrische und $f_2 : V \times V \to K$ eine schiefsymmetrische (d.h. $f_2(v, w) = -f(w, v)$, für jede $v, w \in V$) Bilinearform ist.

2. (a) Sei $(V, <, >)$ ein euklidisher Vektorraum mit die Norm definiert durch

$$||v|| := \sqrt{< v, v >},$$

für alle $v \in V$. Beweisen Sie die Parallelogramgleichung

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2,$$

für alle $v, w \in V$.
(b) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $s : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform mit zugehörige quadratische Form $q : V \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie dass

$$s(v, w) = \frac{1}{4}\big(q(v + w) - q(v - w) + i \cdot q(v + iw) - i \cdot q(v - iw)\big).$$

3. Wir definieren für den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die bilinear Form

$$g(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

(a) Geben Sie die zu f gehörige quadratische Form q.
(b) Geben Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{K}}(f)$, bzgl. der Kanonischenbasis an.
(c) Geben Sie die folgende Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} := \{(1, 2, 3), (1, 4, 9), (1, 8, 27)\}.$$

Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}(f)$.

4. Welches der folgenden Abbildungen $f : K^2 \to K$ sind Bilinearformen?
(a)$f(x, y) = x + y$.
(b) $f(x, y) = x^2 + y^2$.
(c) $f(x, y) = xy$.
(d) $f(x, y) = xy^2$.