Lineare Algebra und analytische Geometrie II: Blatt 7

Abgabe 10.06.2009

Aufgabe 1

Sei $U \leq V$ ein Untervektorraum eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, und sei $(u_1, \ldots, u_k)$ eine Orthonormalbasis von U. Die Abbildung $pr_U : V \to U$ ist durch

$$pr_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i$$

gegeben. Für einen festen Vektor $v \in V$ und einen beliebigen $u \in U$, zeige: die Länge $\|v - u\|$ ist genau dann minimal, wenn $u = pr_U(v)$.

Aufgabe 2

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Für $a \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ sei die Abbildung

$$f : V \to V, \qquad f(x) = x + a\,\langle x, v \rangle\, v \tag{1}$$

gegeben.

(i) Zeige, dass f linear ist.

(ii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ is f längentreu?

(iii) Charakterisiere die Abbildung f geometrisch für diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für die f längentreu ist.

Aufgabe 3

1) Es sei $V = \mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen, und es sei U der von den Vektoren $(2,1,0,3)^t$, $(4,2,1,-1)^t$, $(1,0,2,-13)^t$ erzeugte Untervektorraum von V. Bestimme eine Basis des zu U orthogonalen Untervektorraums $U^\perp$.

2) Es sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen, und es sei U der von den Vektoren $v_1 = (-3,-3,3,3)^t$, $v_2 = (-5,-5,7,7)$, und $v_3 = (4,-2,0,6)$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Benutze das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren zur Konstruktion einer Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 4

Beschreibe geometrisch die folgenden Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, die durch $\phi(x) = Ax$ gegeben werden, mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

sowie

$$A = \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 3/7 & -6/7 & 2/7 \\ 6/7 & 2/7 & -3/7 \end{pmatrix}.$$

Gib die konkreten Daten an: Drehachse, Spiegelungsgerade, oder -ebene, Drehwinkel, und -richtung.