Lineare Algebra und analytische Geometrie II: Blatt 8

Abgabe 17.06.2009

Aufgabe 1

Wir definieren die *unitäre Gruppe*

$$U(n) := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : \overline{A}^t A = I_n\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $U(n)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist.
b) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie:

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \text{ für alle } x, y \in V \quad \Longleftrightarrow \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in U(n),$$

wobei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V ist. In diesem Fall heißt f *unitär*.
c) Beweisen Sie: Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $||f(v)|| = ||v||$ für alle $v \in V$, so ist f unitär.

Aufgabe 2

Eine *komplexe Struktur* auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist ein Endomorphismus $J \in \mathrm{End}(V)$ mit $J^2 = -Id_V$. Zeigen Sie:
a) Mit der skalaren Multiplikation

$$(x + iy) \cdot v := xv + yJ(v),$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $v \in V$, wird V zu einem $\mathbb{C}$-Vektorrraum.
b) Ist $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, so ist $\dim_{\mathbb{R}} V$ gerade.
c) Sei $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ eine schiefsymmetrische Bilinearform, die nicht-ausgeartet ist. Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V$ gilt : $\omega(v, w) = \omega(J(v), J(w))$.
(*Lösungshinweis:* Man kann zeigen, dass, falls $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V über $\mathbb{C}$ ist, dann ist $\{v_1, \ldots, v_n, J(v_1), \ldots, J(v_n)\}$ eine Basis von V über $\mathbb{R}$.)

Aufgabe 3

a) Sei E ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$. Beweisen Sie für Vektoren $u, v \in E - \{0\}$:

$$\angle(u,v) \in \{0, \pi\} \quad \Longleftrightarrow \quad u \text{ und } v \text{ sind linear abhängig.}$$

b) In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum W mit $\dim_{\mathbb{R}} W \geq 2$ sei ein Skalaprodukt $\langle , \rangle$ erklärt. Zeigen Sie: Für Vektoren $u, v \in W$ gilt

$$\langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle \cdot \langle u, v \rangle \neq 0$$

genau dann, wenn die Vektoren u und v linear unabhängig sind.

Aufgabe 4

In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum W mit $\dim_{\mathbb{R}} W \geq 3$ sei ein Skalaprodukt $\langle , \rangle$ erklärt, und in W seien zwei nicht-parallele Geraden

$$L = a + \mathbb{R} \cdot u, \quad L' = b + \mathbb{R} \cdot v$$

ohne gemeinsamen Punkt gegeben (windschiefe Geraden), mit $a, b, u, v \in W, u \neq 0, v \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt eine Gerade in W, die beide Geraden L und L' schneidet und zu beiden orthogonal verläuft. (Nutzen Sie zum Beweis das in Aufgabe 3 b) Gezeigte.)