Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Blatt 10, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(16 Punkte)** Es sei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, sowie $B_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \subset K[X]$ und $B_2 = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4\} \subset K[X]$ mit

$$b_i = (X - (i-1))^3 \quad \text{und} \quad \bar{b}_i = \sum_{k=0}^{i-1} X^k \quad \text{für } i \in \{1, \dots, 4\}.$$

Es sei $B_3 = \{1, X, X^2, X^3\}$ die Standardbasis des K-Vektoraumes V.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei B_1 und B_2 um Basen von $V = span\{P \in K[X] : \deg P \leq 3\}$ handelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Polynomes

$$f(X) = X + 2X^2 + X^3,$$

bezüglich B_1 und B_2.

(b) Geben Sie die Basiswechselmatrizen $M_{B_1}^{B_2}(Id), M_{B_2}^{B_3}(Id)$ und $M_{B_1}^{B_3}(Id)$ an. Dabei ist bekanntlich $M_{B_2}^{B_1}(Id) = \{\lambda_{ij}\}$ die Matrix (i ist der Zeilenindex ind j der Spaltenindex), deren Einträgedie Eigenschaft

$$Id(b_i) = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} \bar{b}_j$$

erfüllen (analog $M_{B_3}^{B_2}(Id)$ und $M_{B_3}^{B_1}(Id)$)).

2. **(12 Punkte)** Sei $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ : \ \exists N_f \in \mathbb{N}, \ f(n) = 0 \text{ für } n \geq N_f\}$. Zeigen Sie dass die Menge

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \ : \ \sum_{i \in \mathbb{N}} f(i) = 0\} \subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$$

zussamen mit den auf $\mathcal{F}$ eingeschränkten Verknüpfungen von $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ bildet. Bestimmen Sie eine Basis dieses Untervektorraumes.

3. **(12 Punkte)** Es sei $n \geq 1$ und φ ein Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ji} e_j \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n$$

und geeignete $\alpha_{ji} \in \mathbb{R}$, wenn $(e_1, \ldots, e_n)$ wie üblich die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet (die Summe über die leere Indexmenge werde als der Nullvektor gedeutet). Zeigen Sie:

$$\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ mal}} = 0.$$