# Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Blatt 11, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(14 Punkte)** Sei $A \in M(3,3:\mathbb{Q})$ die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $A^2 = A + I_3$. (b) Finden Sie reelle Zahlen $u_n$ und $v_n$, so dass für jede $n \in \mathbb{N}$ Folgendes gilt:

$$A^n = u_n A + v_n I_3.$$

2. **(12 Punkte)** Zeigen Sie, dass für jede Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,2:K)$$

existieren Skalaren $\alpha, \beta \in K$, mit $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = 0$. Bestimmen Sie $\alpha$ und $\beta$.

3. **(14 Punkte)**

(a) Sei $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung für welche

$$\begin{array}{cc} \phi((1,0,0,0)) = 1 & \phi((1,-1,0,0)) = 0 \\ \phi((1,-1,1,0)) = 1 & \phi((1,-1,1,-1)) = 0. \end{array}$$

Bestimmen Sie $\phi((a,b,c,d))$. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, die durch

$$T((x,y,z)^t) = (x+y, x-z, 2y+3z, -x+5z)^t$$

definiert ist. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_A^B(T)$, wobei die Basen $A$ (bzw. $B$) für $\mathbb{R}^3$ (bzw. $\mathbb{R}^4$) sind

$$A = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad B = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

**Bemerkungen.** Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Namen lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!