Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Blatt 2, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(10 Punkte)** Sei A eine Menge mit n Elementen. Man berechne die Anzahl

- aller Operationen (Verknüpfungen),
- der kommutativen Operationen,
- der kommutativen Operationen mit neutralem Element $e \in A$.

2. **(10 Punkte)** Beweisen Sie, dass es sich bei den folgenden Verknüpfungen um Monoide handelt:

- $(\mathbb{R}^2, \circ)$, mit $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) := (x_1 x_2, x_2 y_1 + y_2)$ und
- $(\mathbb{Z}^2, *)$, mit $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

3. **(10 Punkte)** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung mit $f(1) = 0$. Man definiert die Verknüpfung $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$a * b := f\big(f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - 1\big),$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}, *)$ eine abelsche Gruppe bildet.

4. **(10 Punkte)** Sei M eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf M sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Es existiert ein neutrales Element.
- $(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$, für ale $a, b, c, d \in M$.

Zeigen Sie, dass $*$ kommutativ und assoziativ ist.

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Namen und übungsgruppe lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!