Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Blatt 3, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(18 Punkte)**(a) Sei G eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$ und $x, y \in G$ Elemente, sodass $x^2 = e$ und $xyx = y^3$. Beweisen Sie, dass $y^8 = e$.
(b) Sei G eine Gruppe sodass es gilt $a^2 = b^2 = (ab)^2$, für all $a, b \in G$. Dann gilt $a^4 = b^4 = (ab)^2$.

2. **(12 Punkte)** Für $a \in \mathbb{N}$ Quadrat-frei (d.h. es ausser der Eins keine Quadratzahl gibt, die a teilt), betrachtet man die Menge

$$\mathbb{Q}[\sqrt{a}]^* := \{x + y\sqrt{a} : x, y \in \mathbb{Q}\} - \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]^*$ mit der Verknüpfung

$$(x_1 + y_1\sqrt{a}) * (x_2 + y_2\sqrt{a}) = x_1x_2 + y_1y_2a + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{a},$$

eine Gruppe bildet. Ist die Gruppe abelsch?

3. **(10 Punkte)** (a) Seien A, B zwei Untergruppen einer Gruppe G. Zeige: Die Vereinigung $A \cup B$ ist dann und nur dann eine Untergruppe von G, wenn $A \subset B$ oder $B \subset A$.

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Namen und übungsgruppe lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!