Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Blatt 4, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(14 Punkte)** (a) Sei G eine Gruppe, sodass $\text{ord}(x) = 2$, für alle Elemente $x \in G - \{e\}$. Beweisen Sie, dass G abelsch ist.

(b) Bewiesen Sie, dass es gibt keine nicht triviale (d.h. ungleich null) Gruppenmorphismen

$$\phi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\, +) \to (\mathbb{Z}, +).$$

2. **(12 Punkte)** (a) Sei G eine zyklische Gruppe der Ordung n und $x \in G$ ein erzeugendes Element. Beweisen Sie, dass das Element $y = x^k$ erzeugt G, genau dann, wenn $\text{ggt}(k, n) = 1$. Wie viele erzeugende Elemnte besitzt die Gruppe $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$?

3. **16 Punkte** Sind G_1 und G_2 Gruppen, so lässt sich auf dem Produkt $G_1 \times G_2$ die folgende Verknüpfung definieren,

$$(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') := (g_1 g_1', g_2 g_2'),$$

wobei $g_1, g_1' \in G_1$ und $g_2, g_2' \in G_2$ beliebige Elemente sind.
(a) Beweisen Sie, dass $G_1 \times G_2$ mit dieser Verknüpfung wieder eine Gruppe bildet.
(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht zyklisch ist. Sind die Gruppen $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph?

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Namen und übungsgruppe lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!