Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Blatt 6, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(14 Punkte)** Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Ein Unterring $I \subset R$ ist ein beidseitiges Ideal, falls $R \cdot I = I \cdot R = I$, d.h., dass $a \cdot r, r \cdot a \in I$, für alle Elemente $a \in I$ und $r \in R$.

(a) Sei $f : R \subset S$ ein Homomorphismus von Ringen und $J \subset S$ ein beidseitiges Ideal. Zeigen Sie, dass auch $f^{-1}(J) \subset R$ ein beidseitiges Ideal ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$(a + I) + (b + I) := (a + b) + I \quad \text{und} \quad (a + I \cdot (b + I) := a \cdot b + I$$

eine Ringstrukture auf R/I definiert, für die die Projektion $\pi : R \to R/I$ ein Ringhomomorphismus ist.

2. **(14 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Menge aller komplexen Zahlen

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] := \{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

ein Unterring von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist. Finden alle invertierbare Elemente $x \in Z[\sqrt{-1}]$, d.h. Elemente, sodass ein Element $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ existiert mit $x \cdot y = y \cdot x = 1$.

2. **(12 Punkte)** (a) Sei M eine Menge. Auf der Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen von M, definiert man die symmetrische Differenz durch

$$A \Delta B := (A - B) \cup (B - A).$$

Beweisen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Sei R ein Ring, sodass $a^3 + a = 0$, für alle $a \in R$. Zeigen Sie, dass $a^2 = a$, für alle Elemet $a \in R$.

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Namen und übungsgruppe lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!