Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Blatt 9, Prof. Dr. Gavril Farkas

1. **(14 Punkte)** (a) Beweisen sie, dass die Menge der Abbildungen

$$V := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(-x) = f(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

ein Untervektoraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bildet.

(b) Ist die Menge aller bijektiven Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

2. **(12 Punkte)** (a) Kann eine abzählbare unendliche menge M eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur besitzen?

(b) Sei $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Wie viele Elemente enthält der Vektorraum K^n?

(c) Sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Man finde alle Basen von K^2. Sei V der Vektorraum der Funktionen auf dem Intervall [0, 1]. Man beweise dass die Funktionen x3, sin(x) und cos(x) linear unabhangig sind.

3. **(14 Punkte)** (a) Sei V der Vektorraum der rellen Funktionen auf dem Interval $[0, 1]$. Man beweise dass die Funktionen $x^3, \sin(x)$ und $\cos(x)$ linear unabhängig sind.

(b) Ist das System bestehend aus der Funktionen

$$f_1(x) = 1 + \cos(2x),\ f_2(x) = 1 - \cos(2x),\ f_3(x) = -\sin^2(3x),\ f_4(x) = \cos^2(3x),$$

linear unabhängig in V?

Bemerkungen. Die Aufgaben sind maximal in Dreiergruppen abzugeben. Die Abgabe erfolgt Aufgabenweise, d.h. jede Aufgabe soll getrennt aufgeschrieben werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Namen lesbar auf jedes Blatt zu schreiben!