

Rahmenplan für Unterricht und Erziehung in der Berliner Schule

Mathematik

Gymnasiale Oberstufe

Einleitung

1. Allgemeine Hinweise

Der vorliegende Rahmenplan gilt für die Einführungs- und die Kursphase der gymnasialen Oberstufe.

Der Rahmenplan gibt **Lernziele**, **Lerninhalte** und **Hinweise** an. Die Lernziele beschreiben Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten, die am Ende des jeweiligen Lernabschnittes von allen Schülern gefordert werden sollen. Die Hinweise zu den Lernabschnitten verdeutlichen die Intentionen.

Lernziele und **Lerninhalte** sind **verbindlich**, gegebenenfalls auch entsprechende Angaben in den Hinweisen. Das gilt auch für ihre Verteilung auf die Einführungsphase bzw. auf die Kurshalbjahre. Die Reihenfolge der Lernabschnitte im Fundamentaltbereich der Einführungsphase und innerhalb eines Kurshalbjahres ist nicht verbindlich; nur die Zweiteilung des Profilkurses ist zu beachten.

Die angegebenen **Stundenzahlen** sind als Planungshilfen bei der Gewichtung der Lernabschnitte gedacht und konkretisieren die inhaltlichen Angaben; es handelt sich nicht um verbindliche Vorgaben. In den Kursen für das 4. Halbjahr wird wegen der Abiturprüfung von einer verringerten Stundenzahl ausgegangen.

Obwohl die Anordnung der Lernziele und Lerninhalte neben systematischen auch didaktischen Erwägungen folgt, ist der Lehrer bei der **Wahl des didaktischen Aufbaus**, wie er etwa im Arbeitsplan seinen Niederschlag findet, nicht gebunden. In der Regel ist es erforderlich, dass ein eigenes didaktisches Konzept entwickelt wird. Der Lehrer hat hier Gestaltungsspielraum, der in eigener Verantwortung genutzt werden muss.

Bezeichnungen, Namensgebungen, Definitionen und Formulierungen sind im Unterricht so zu wählen, wie sie in der Mathematik oder in Anwendungsgebieten üblich sind, sofern dem nicht begründete wissenschaftliche oder didaktische Einwände entgegenstehen. (Das gleiche gilt auch für die im Rahmenplan benutzten Schreibweisen.) Vorhandene DIN-Normen sind dabei zu beachten. Die mathematische Fachsprache soll angemessen genutzt werden, doch sind logische Zeichen als Versatzstücke oder zur ausschließlichen Abkürzung von Satzteilen in an sich muttersprachlich formulierten Aussagen nicht angebracht.

Die in der Kursphase vorgesehene **Differenzierung** des Unterrichts in **Grundkurs** und **Leistungskurs** erfordert vom Lehrer unterschiedliche didaktisch-methodische Entscheidungen. Die **Lerninhalte** und **-ziele** der Leistungskurse gehen in der Regel über jene der Grundkurse hinaus; das betrifft nicht nur den Umfang, sondern auch das Anspruchsniveau, damit dem Schüler ein vertieftes wissenschaftspropädeutisches Verständnis vermittelt werden kann. Bei den Entscheidungen sind folgende Gesichtspunkte zu beachten:

- Vertiefung und Reflexion der theoretischen Grundlegung bei tragenden Inhalten und wesentlichen Begriffen
- Methodisches Vorgehen unter Berücksichtigung eines angemessenen Abstraktionsniveaus bzw. geeigneter Konkretisierungen bei der Erarbeitung der Unterrichtsinhalte
- Strenge von Begründungen bzw. Beweisverfahren; Bewußtmachen von Lücken
- Präzisionsniveau bei verbalen Formulierungen; Verwendung von formalisierter Fachsprache
- Angemessenheit des Beispielmaterials; seine Komplexität, seine Vielfalt und die Art seiner Anwendungsorientiertheit
- Einsicht in die Tragweite von Verfahren und die Erweiterung des Anwendungsbereichs von Begriffen und Sätzen
- Einbeziehung komplexer und gebietsübergreifender mathematischer Zusammenhänge
- Grad der Selbständigkeit bei der Bearbeitung von Problemen durch Schüler.

2. Hinweise zu den Klausurarbeiten

Klausurarbeiten dienen der Lernerfolgskontrolle. Sie müssen sich im Wesentlichen auf den vom Rahmenplan für das entsprechende Halbjahr vorgesehenen Stoffe beziehen. **Kenntnisse aus vorangegangenen Halbjahren** bzw. aus **der Einführungsphase** können in die Aufgabenstellung integriert werden, soweit das im Rahmen des gewählten kursspezifischen Schwerpunkts einer Aufgabe notwendig ist. Dies gilt erst recht für Abituraufgaben.

Mit zunehmendem Ausbildungsstand ist der Schüler an die **Anforderungen der Abiturprüfung** heranzuführen; das bedeutet insbesondere, dass Leistungsanforderungen aus den verschiedenen Niveaubereichen im Verhältnis 4 : 5 : 1 in den Aufgabenstellungen anzustreben sind. Um die Schüler im Grundkurs auf die schriftliche Abiturprüfung angemessen vorzubereiten, sollen sich die Klausurarbeiten in den ersten drei Kurshalbjahren auf verschiedene Sachgebiete beziehen, also nicht ausschließlich auf Analysis. Die Reihenfolge der Lernabschnitte innerhalb eines Kurshalbjahres sollte deshalb - gegebenenfalls mit schulinterner Absprache - geeignet gewählt werden.

In der Kursphase müssen die Aufgaben in ihrem **Anspruchsniveau** auf den Grund- bzw. Leistungskurs zugeschnitten sein, im Leistungskurs also Aufgabenteile enthalten, die für das hier zu erreichende Anspruchsniveau, gemessen an den Lernzielen, typisch sind. Das gilt erst recht für Abituraufgaben, wobei zusätzlich zu beachten ist, dass Unterrichtsinhalte einführenden Charakters, die im Rahmen eines Lernabschnitts durchaus methodisch sinnvoll und notwendig sind, noch nicht unbedingt das intendierte Anspruchsniveau repräsentieren.

In den Klausurarbeiten sollen die Schüler u. a. nachweisen, dass sie mathematische Gedankengänge richtig vollziehen, klar und verständlich darstellen und gegebenenfalls zeichnerisch veranschaulichen können. Im erläuternden Text sind in angemessener Fachsprache Bezüge zu wesentlichen Definitionen und Sätzen zu klären, Lösungsstrategien darzustellen und Teilergebnisse zu kommentieren.

3. Didaktisch-methodische Hinweise

Bei der unterrichtlichen Umsetzung der im Rahmenplan formulierten Lernziele und Lerninhalte sind insbesondere die folgenden wichtigen didaktisch-methodischen Prinzipien zu beachten:

- **Selbständigkeit** der Schüler ist eine wesentliche Voraussetzung für Lernerfolge im Mathematikunterricht. Ihr ist daher sowohl beim Einüben von Fertigkeiten und Anwenden mathematischer Verfahren als auch beim Entwickeln von Fragestellungen, Entdecken von Beziehungen, kritischen Prüfen von Ergebnissen und Begründungen, Finden und Lösen von Problemen entsprechend Raum zu geben.
- **Propädeutische** Betrachtungen und **heuristische** Strategien sind wesentliche Hilfen für das Wecken mathematischen Verständnisses, insbesondere bei der Entwicklung von Begriffsbildungen und beim Erschliessen und Verstehen mathematischer Zusammenhänge. Propädeutischen und heuristischen Phasen der Erkenntnisgewinnung sollte deshalb an dafür geeigneten Stellen eine eigenständige methodische Stellung eingeräumt werden.
- Der **Grad der Präzision und Vertiefung** ist im Mathematikunterricht stets in Abwägung mathematischer, lernpsychologischer und zeitlicher Gesichtspunkte zu wählen. Vor allem in Grundkursen wird es daher nötig sein, mitunter auf Beweise zu verzichten und sich mit anschaulichen oder propädeutischen Betrachtungen zu begnügen. Dieses Verfahren ist der lernpsychologisch bedenklichen Vorführung mancher Beweise vorzuziehen, wobei es häufig sinnvoll ist, auf die Beweislücken aufmerksam zu machen.
- Die **Geschichte der Mathematik** kann zwar nicht selbständiger Unterrichtsinhalt sein; doch wird empfohlen, an geeigneten Stellen historische Bezüge herzustellen und methodisch zu nutzen, etwa im Zusammenhang mit motivierenden Einstiegen bzw. genetischen Ansätzen, bei Vertiefungen oder bei Anwendungen.

4. Hinweise zur Benutzung von Computern

Der **Computer** wird zunehmend als **Arbeitsmittel** oder **Medium** im Mathematikunterricht sinnvoll verwendet werden können. Er eröffnet neue Zugänge zu vielen mathematischen Lerninhalten und kann den Unterricht bei angemessenem Einsatz anschaulicher, konkreter, anwendungsorientierter, lebensnäher und damit auch interessanter gestalten.

Der **Einsatz des Computers** ist stets unter **didaktisch-methodischen Gesichtspunkten** mit dem Ziel einer Verbesserung des Mathematikunterrichts zu sehen und darf **nicht Selbstzweck** sein. Die Verwendung des Computers muss sich also an den Zielen des Mathematikunterrichts orientieren. So ist darauf zu achten, dass mathematische Begründungen nicht durch numerische oder grafische Veranschaulichungen verdrängt werden. Durch die Möglichkeiten des experimentellen Arbeitens am Gerät (Beispielmaterial erstellen, Informationen sammeln, Beziehungen und Unterschiede erkennen, Verallgemeinerungen formulieren) ergibt sich häufig ein fließender Übergang zu den dahinter stehenden mathematischen Gesetzmässigkeiten, die für den Schüler von grösserem Interesse sein können als vorher.

Unter den verschiedenen **Einsatzformen** des Computers bieten sich besonders an: Experimentelles Arbeiten in der oben skizzierten Art, Auswertung des vom Computer erzeugten Zahlenmaterials oder von Grafiken, Veranschaulichung oder Überprüfung von Sachverhalten, Erstellung von Arbeitsmaterialien.

Auch für die **Unterrichtsform** gibt es Varianten: Einzelarbeit am Gerät, Partnerarbeit, Demonstration durch Lehrer oder Schüler (beispielsweise über ein LC-Display), gemeinsame Erarbeitung an einem Gerät mit gleichzeitiger Projektion.

Die **Erstellung von Programmen** durch den Schüler kann jedoch in der Regel **nicht Gegenstand des Mathematikunterrichts** sein. Im Vordergrund steht die Anwendung fertiger Programme, das heisst deren Nutzung für die Ziele des Mathematikunterrichts. Bei der Software wird es sich in der Regel um fertige **Unterrichtssoftware** handeln, die vom Lehrer auf ihre jeweilige Eignung geprüft werden muss.

Einführungsphase: Fundamentalbereich

Übersicht und allgemeine Hinweise

	Stunden		Stunden
Einführung in die Analysis	90	Untersuchung von Funktionen ohne Differentialrechnung	30
		Folgen ohne Grenzwert	15
		Ableitung	15
		Untersuchung von Funktionen mit Differentialrechnung	30
Einführung in die analytische Geometrie	30	Punkte im Koordinatensystem, Vektoren im kartesischen Koordinatensystem, Geraden	30

Die Lernziele des Fundamentalbereiches enthalten **wiederholende Elemente** oder geben die Möglichkeit, Wiederholungen von Lerninhalten vorausgegangenen Unterrichts zu integrieren. Dabei wurde vor allem an solche Lerninhalte vorangegangener Klassen gedacht, die für den erfolgreichen Unterricht in der Kursphase notwendig sind. Isolierte wie auch zu umfangreiche integrierte Wiederholung von Lernabschnitten früherer Klassen entsprechen nicht der Konzeption des Rahmenplanes.

Der Unterricht im Fundamentalbereich muss für alle Schüler die **Voraussetzung für eine chancengleiche Mitarbeit** in den anschliessenden Kursen schaffen. Der Sicherung der Kenntnisse ist deshalb besonderes Gewicht zu geben. Inhaltliche Vorgriffe sind ebenso zu vermeiden wie Lücken bei der Erfüllung der Lernziele, da in den Kenntnissen inhomogene Schülergruppen den Unterricht in den Kursen der Kursphase sehr erschweren. In der Regel ist eine Koordinierung der Arbeitspläne über die Fachkonferenz und den Fachbereichsleiter erforderlich.

Einführung in die Analysis

(90 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- Im Rahmen des ersten Teiles ist der Funktionsbegriff zu wiederholen und zu präzisieren. Wesentliche Begriffe sind dabei: Zuordnungsvorschrift, Definitionsmenge, Wertemenge, Funktionsterm, Funktionsgleichung, Graf.
- Der Schüler soll lernen, Grundbegriffe der Differentialrechnung verständnisvoll zu gebrauchen, sie geometrisch zu deuten und in Anwendungszusammenhängen zu erkennen.
- Zentraler Begriff der Differentialrechnung ist die Ableitung einer Funktion an einer Stelle. Sie ist als Grenzwert von Differenzenquotienten zu definieren.
- Beweislücken, die sich aus didaktisch-methodischen oder fachsystematischen Gründen ergeben, sind in der Regel den Schülern bewusst zumachen.
- Die in den Lernzielen und bei der Angabe der Lerninhalte verwendete Terminologie ist für den Unterricht nicht verbindlich und kann durch eine fachsprachlich äquivalente Terminologie ersetzt werden. Die im Rahmenplan teilweise verwendeten verkürzten Schreibweisen dienen hier nur der besseren Lesbarkeit.

Hinweise für gymnasiale Oberstufen an Gesamtschulen

- In der 10. Klasse der Gesamtschule ist im Gegensatz zum Gymnasium und zur Realschule ein Lernabschnitt „Exponential- und Logarithmusfunktion“ nicht vorgesehen. In angemessener verkürzter Form sind deshalb in den gymnasialen Oberstufen an Gesamtschulen entsprechende Kenntnisse im ersten Lernabschnitt zu vermitteln.
- Sofern die Aufnahme der zusätzlichen Unterrichtsinhalte nicht durch über das Schuljahr verteilte zeitliche Anpassungen aufgefangen werden kann, ist es möglich, im ersten Lernabschnitt auf die Behandlung der Parabeln oder der Regula falsi zu verzichten.

Untersuchung von Funktionen ohne Differentialrechnung (30 Stunden)

Die Grafen vorgegebener linearer Funktionen zeichnen und zu vorgegebenen Geraden jeweils eine zugehörige Gleichung angeben können.

Lineare Funktion;
Geradengleichung, auch für achsenparallele Geraden; Gleichung einer Geraden durch zwei vorgegebene Punkte.

Aus den Koordinaten von zwei Geradenpunkten die Geradensteigung berechnen können

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Die Gleichung $m = \tan \alpha$ kennen und anwenden können

Schnittwinkel α einer Geraden mit der x-Achse.

Die Grafen einiger „Standardfunktionen“ kennen und skizzieren können.

$$x \rightarrow x^2, x \rightarrow x^3, x \rightarrow x^4, x \rightarrow \frac{1}{x}, x \rightarrow \frac{1}{x^2}$$

$$\text{und } x \rightarrow |x|$$

Wissen, wie sich Verschiebungen von Funktionsgraphen parallel zu den Koordinatenachsen auf den Funktionsterm auswirken, und in einfachen Fällen zu achsenparallel verschobenen Funktionsgraphen den Funktionsterm angeben können.

Verschiebung der Normalparabel in y-Richtung und in x-Richtung; Anwendung auf weitere Funktionen, wie z. B. f mit

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

Wissen, wie sich die Multiplikation eines Funktionsterms mit einer Zahl auf den zugehörigen Graphen auswirkt.

Zusammenhang der Grafen zu.
 $x \rightarrow f(x)$ und $x \rightarrow a \cdot f(x)$.

Wissen, dass der Graph zu $x \rightarrow ax^2 + bx + c$ eine Parabel ist.

Die Graphen zu $x \rightarrow A \cdot \sin(x+b)$ und $x \rightarrow A \cdot \cos(x+b)$ skizzieren können.

Wiederholung des Bogenmaßes, Wiederholung und Vertiefung von sin und cos als Funktionen über \mathbb{R} .

Zu vorgegebenen einfachen Funktionstermen Symmetrien der Grafen erkennen und rechnerisch begründen können.

Symmetrie bezüglich der y-Achse, Symmetrie bezüglich des Ursprungs; als Beispiel kommen in Frage:

$$x \rightarrow x^2, x \rightarrow x^3, x \rightarrow x^4, x \rightarrow \frac{1}{x}, x \rightarrow \frac{1}{x^2},$$

$$x \rightarrow \sin x, x \rightarrow \cos x$$

Nullstellen von einfachen ganzrationalen Funktionen bestimmen können.

Nullstellenberechnung durch Lösung quadratischer und biquadratischer Gleichungen sowie durch Abspalten von Linearfaktoren (Division von Polynomen durch lineare Terme).

Die regula falsi kennen und anwenden können.

Regula falsi.

Folgen und Grenzwert (15 Stunden)

Die Bildungsgesetze arithmetischer und geometrischer Folgen kennen. Den Begriff der unendlichen Zahlenfolge kennen.

Einfache Beispiele zu arithmetischen und geometrischen Folgen und zu geometrischen Reihen (Summenformel); Anwendungen, dabei Zinseszins. Klärung wesentlicher Begriffe im Zusammenhang mit Zahlenfolgen an Hand einiger einfacher Beispiele: allgemeines Folgenglied (Bildungsgesetz), Monotonie, Beschränktheit; Veranschaulichung von Zahlenfolgen auf der Zahlengeraden.

Hinweis:

Es ist nicht erforderlich, Folgen explizit als reellwertige Funktionen auf \mathbb{N} zu definieren.

Eine Definition des Grenzwerts einer Folge kennen.

Grenzwert einer Folge.

Für einfache konvergente Zahlenfolgen den Grenzwert erkennen und durch Anwendung der Grenzwertdefinition nachweisen können, dass die erkannte Zahl tatsächlich der Grenzwert ist.

Konvergente Zahlenfolgen, Nullfolgen (die gewählten Beispiele sollten nicht die Lösung einer quadratischen Ungleichung notwendig machen); einige Beispiele divergenter Zahlenfolgen.

Die Grenzwertsätze für die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten von Zahlenfolgen kennen und zum Konvergenznachweis anwenden können.

Verknüpfung von Zahlenfolgen; Grenzwertsätze; exemplarischer Beweis eines Grenzwertsatzes.

Ableitung (15 Stunden)

Die Definition der Ableitung einer Funktion an einer Stelle kennen und die Ableitung als Tangentensteigung deuten können.

Ableitung einer Funktion an einer Stelle als Grenzwert von Differenzquotienten;

Für einfache ganzrationale Funktionen die Ableitung an einer Stelle durch Anwendung der Definition der Ableitung bestimmen können.

Übungen zur Ableitung bei einfachen ganzrationalen Funktionen für konkrete Stellen; Beispiel einer Funktion, die an einer Stelle nicht differenzierbar ist.

Den Ableitungsbegriff in Anwendungssituationen interpretieren können.

Als Interpretationen des Ableitungsbegriffs kommen in Frage:

Momentangeschwindigkeit; Temperaturgefälle, Verkehrsdichte, lokale Änderungsrate u. a.

Den Begriff der Ableitungsfunktion kennen und zu vorgegebenem Funktionsgraphen den Graphen der Ableitungsfunktion skizzieren können

Bei vorgegebenen Funktionsgraphen Skizzen der Graphen der Ableitungsfunktionen ohne Wertetabellen.

Wissen und begründen könne, dass gilt:

Zusammenhang zwischen dem Monotonieverhalten einer Funktion und dem Vorzeichen der Ableitung.

- (1) Wenn die differenzierbare Funktion f in einem Intervall I monoton wächst (fällt), dann ist $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) für alle Stellen x aus I .

Wissen, dass gilt:

Hinweis:

- (2) Wenn $f'(x) > 0$ (< 0) für alle Stellen aus einem Intervall I ist, dann wächst (fällt) f streng monoton auf diesem Intervall.

Satz (2) ist der Anschauung zu entnehmen.

Die zur Ableitung ganzrationaler Funktionen notwendigen Ableitungsregeln kennen und damit ganzrationale Funktionen ableiten können.

Ableitungsregeln:

$$(c)' = 0; (x)' = 1;$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{für alle}$$

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$$

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

Anwendung dieser Ableitungsregeln.

Die Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

ableiten können.

Ableitung von f und g mit

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

durch Anwendung der Definition der Ableitung.

Untersuchung von Funktionen mit Differentialrechnung (30 Stunden)

Die Definition von (relativen) Extrem- und von Wendepunkte kennen.

Bei genügend oft differenzierbaren Funktionen für (relative) Extrem- und für Wendepunkte notwendige Bedingungen und jeweils eine hinreichende Bedingung kennen. Charakteristische Punkte von Grafen ganzrationaler Funktionen bestimmen und damit den Funktionsgraphen skizzieren können.

Zu vorgegebenen Bedingungen die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion bestimmen können.

Extremwertaufgaben, die auf ganzrationale Zielfunktionen führen, lösen können.

Das Newton-Verfahren zur näherungsweisen Nullstellenbestimmung am Funktionsgraphen erläutern und rechnerisch anwenden können

Charakteristische Punkte von Funktionsgraphen; Krümmungsverhalten. Sätze über (relative) Extrem- und über Wendepunkte.

Untersuchung ganzrationaler Funktionen: Bestimmen von Achsenschnittpunkten, Hoch-, Tief- und Wendepunkten; gegebenenfalls Symmetrie.

Ermittlung der Koeffizienten des Funktionsterms einer ganzrationalen Funktion durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

Einige Extremwertaufgaben; dabei exemplarisch auch Untersuchung von Zielfunktionen am Rande ihrer Definitionsmengen (absoluter Extremwert). Newtonsches Näherungsverfahren.

Hinweis:

Allgemeine Konvergenzbetrachtungen sind nicht vorgesehen.

Einführung in die analytische Geometrie

(30 Stunden)

Hinweis zum Lernabschnitt

- Der Lernabschnitt dient einer elementaren Einführung in die analytische Geometrie, vor allem der des Raumes. Vektoren sind naiv über das Koordinatensystem als Spalten einzuführen; an eine Einführung des Vektorbegriffs über Pfeilklassenbildung und an strukturelle Betrachtungen zum Vektorraum ist nicht gedacht.

Lernziele

Lerninhalte

Punkte im Koordinatensystem

Wissen, dass man im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem Punkte durch Zahlentripel beschreiben kann. Die zu vorgegebenen Zahlentripeln gehörenden Punkte im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem zeichnen können. Die Entfernung von je zwei Punkten im Koordinatensystem berechnen können. Die Gleichungen für Kreis und Kugel in Ursprungslage kennen und herleiten können. Rechnerisch feststellen können, ob Punkte innerhalb oder außerhalb vorgegebener Kreise (Kugeln) bzw. auf ihnen liegen.

Darstellung von Punkten im \mathbb{R}^3 .

Entfernungen von Punkten \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 im kartesischen Koordinatensystem. Gleichungen von Kreisen und Kugeln mit dem Ursprung als Mittelpunkt.

Vektoren im kartesischen Koordinatensystem

Wissen, dass Spalten aus zwei oder drei reellen Zahlen Vektoren heißen.

Vektoren im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 als Spalten; Zusammenhang zwischen Spalten und Punkten, Pfeilen und Verschiebungen in der Ebene und im Raum.

Hinweis:

Es ist empfehlenswert, Koordinatenpaare oder -tripel von Punkten zeilenweise zu schreiben.

Im kartesischen Koordinatensystem Spalten (Vektoren) durch Pfeile deuten können; Pfeile durch Spalten beschreiben können. Im kartesischen Koordinatensystem den Zusammenhang zwischen Punkten und Pfeilen bzw. Spalten kennen. Mit Vektoren sicher rechnen können.

Rechnen mit Vektoren: Gegenvektor, Addition und Subtraktion von Vektoren, Nullvektor, Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl, Länge eines Vektors, Einheitsvektor. Regeln für das Rechnen mit Vektoren.

Einige Regeln für das Rechnen mit Vektoren durch Rechnen mit Spalten herleiten können. Anwendungen von Vektoren kennen.

Vektoren in geometrischen und nichtgeometrischen Bezügen.

Geraden

Den Mittelpunkt einer Strecke vektoriell berechnen können. Geradengleichungen in vektorieller Form bestimmen können.

Mittelpunkt einer Strecke.

Geradengleichungen (vektoriell) im \mathbb{R}^3 : Punkt-Richtungs-Form, Zwei-Punkte-Form. Parallele Geraden.

Rechnerisch überprüfen können, ob vorgegebene Punkte auf einer Geraden liegen.

Die relative Lage von zwei Geraden zueinander untersuchen und den Schnittpunkt gegebenenfalls berechnen können.

Relative Lage von Geraden zueinander im \mathbb{R}^3 : sich schneidende, parallele, windschiefe, identische Geraden.

Einfache geometrische Probleme mit Vektoren lösen können.

Anwendungen von Geradengleichungen zur Lösung geometrischer Probleme, wie z. B. Schwerpunktbestimmung im Dreieck, Spurpunkte.

Geradengleichungen im \mathbb{R}^2 in vektorieller Form und in Koordinatenform wechselweise umformen können.

Rechnerisch feststellen können, ob vorgegebene Kreise und Geraden Schnittpunkte haben, und diese gegebenenfalls bestimmen können.

Verschiedene Gleichungen zu einer Geraden im \mathbb{R}^2 .

Schnitt von Kreis in Ursprungslage mit einer Geraden im \mathbb{R}^2 .

Einführungsphase: Profilkurs

Übersicht und allgemeine Hinweise

	Stunden		Stunden
1. Schulhalbjahr	30	Komplexe Zahlen	30
2. Schulhalbjahr	30	Vollständige Induktion	15
		Wahlgebiet	15

Die Arbeit im Profilkurs soll sowohl von den Unterrichtsinhalten als auch vom Unterrichtsstil her die Schüler auf die **Arbeitsweise** in den **Leistungskursen vorbereiten** und damit auch Orientierungshilfen bei der Leistungsfachwahl geben. Auf die explizite Formulierung von Lernzielen wurde verzichtet, um dem Lehrer möglichst viel Freiheit bei der Wahl des didaktischen Aufbaues zu geben.

Da die Schüler nach der ersten Hälfte des Schuljahres die Möglichkeit haben, Profilkurse zu wechseln, ist die vorgesehene **Aufteilung der Unterrichtsinhalte** auf die beiden Schulhalbjahre zu beachten.

1. Schulhalbjahr (30 Stunden): Komplexe Zahlen

Lerninhalte	Hinweise
Rückblick auf die bisher bekannten Zahlbereiche unter dem Gesichtspunkt der Lösbarkeit von Gleichungen.	
\mathbb{Q} und \mathbb{R} als angeordnete Körper.	Aus den dem Schüler bekannten Regeln sollten einige als Axiome hervorgehoben werden.
Beweis einiger Regeln.	Schlussfolgerungen aus den Axiomen, z. B.: Für alle $a \in K$ eines angeordneten Körpers K gilt $a^2 > 0$.
Einführung komplexer Zahlen als Zahlenpaare und ihrer Verknüpfungen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.	Als Einstieg kann dienen, dass ein Körper, in dem $x^2 = -1$ lösbar ist, nicht angeordnet werden kann. - Eine andere gleichwertige Einführung der komplexen Zahlen ist zulässig.

Einbettung des Körpers \mathbb{R} der reellen Zahlen in den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen und Nachweis, dass \mathbb{C} im Gegensatz zu den dem Schüler bisher bekannten Körpern nicht anzuordnen ist.

Dass \mathbb{C} ein Körper ist, muss nachgewiesen werden. Weitere Regeln der Arithmetik sollten nicht bewiesen werden. Dem Schüler soll lediglich bewusst werden, dass diese Regeln aus den Körperaxiomen herleitbar sind.

Darstellung einer komplexen Zahl in der Form $a + bi$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$.

Gaßsche Zahlenebene:

Darstellung von komplexen Zahlen in der Ebene mit Hilfe von kartesischen und Polarkoordinaten

$(z = x + iy, z = r \cos j + i \sin j)$. Betrag einer komplexen Zahl $(z^2 = z \cdot z)$. Multiplikation und Division in \mathbb{C} bei Darstellung in Polarform nebst geometrischer Veranschaulichung.

Auch Rechenübungen sind vorgesehen, insbesondere bei Darstellung von komplexen Zahlen in der Form $a + ib$.

Potenzen einer komplexen Zahl in Polarform:

$$(r \cos j + i \sin j)^n = r^n (\cos n \cdot j + i \sin n \cdot j).$$

Ein Beweis mit vollständiger Induktion ist an dieser Stelle noch nicht möglich.

Lösung der Gleichung $x^n = a$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ über die Grundmenge \mathbb{C} . Einheitswurzeln und Kreisteilung.

Empfohlene Ergänzung

Ausblick auf den Fundamentalsatz der Algebra.

2. Schulhalbjahr (30 Stunden)

Vollständige Induktion (15 Stunden)

Lerninhalte	Hinweise
Prinzip der vollständigen Induktion.	Der Schüler soll Induktionsbeweise verstehen und in einfachen Fällen selbst führen können. Das schliesst ein schülergemäßes Verständnis der logischen Struktur eines Induktionsbeweises ein.
Anwendungen.	Die Anwendungen dürfen sich nicht nur auf Beweise von Summenformeln beschränken. Z. B. könnten auch Ungleichungen mit einer Variablen über \mathbb{N} betrachtet werden.

Wahlgebiet

(15 Stunden)

Im zweiten Lernabschnitt hat der Lehrer die Möglichkeit, eines der im folgenden näher beschriebenen Themen auszuwählen. Es wird dem Lehrer jedoch auch gestattet, an Stelle eines der vorgeschlagenen Themenkreise ein anderes, von ihm selbst zu bestimmendes mathematisches Gebiet zu unterrichten. Dieses muss in seinen Anforderungen mit den unten vorgestellten Lernabschnitten vergleichbar sein und darf keinen Vorgriff auf im Kurssystem zu behandelnde Lerninhalte bedeuten. Nur solche Inhalte dürfen gewählt werden, die sich einem verbindenden Oberthema unterordnen lassen; insbesondere ist es nicht zulässig, eine Auswahl von Problemen aus mehreren der unten genannten verschiedenen Lernabschnitte zu einem neuen Lernabschnitt zusammenzufassen.

Alternative 1: Rekursive Verfahren

In den Erläuterungen sind fünf Probleme genannt. Dadurch wird der angestrebte Umfang des Lernabschnitts inhaltlich beschrieben. Es besteht die Möglichkeit, ein oder auch mehrere der genannten Probleme gegen andere gleichwertige auszutauschen.

Lerninhalte	Hinweise
Ausgewählte mathematische Probleme, die mit rekursiven Verfahren gelöst werden.	<ul style="list-style-type: none">– Zweifarbenproblem– Zerschneidungsproblem– Geldwechselproblem– Pascalzahlen– Fibonaccizahlen. <p>Das Verfahren der vollständigen Induktion kann hier verwendet werden. Es besteht auch die Möglichkeit, diesen Lernabschnitt in den Lernabschnitt zur vollständigen Induktion zu integrieren.</p>

Alternative 2: Kombinatorische Zählprinzipien

In diesem Lernabschnitt sollen an Hand geeigneter Aufgaben allgemeine Zählstrategien (mit den dazugehörigen Modellen) entwickelt werden. Es ist zu beachten, dass wahrheitstheoretische Begriffsbildungen und Problemstellungen nicht behandelt werden sollen. Vorrangiges Ziel sind Methoden zur Anzahlbestimmung bei geeigneten Fragestellungen, z. B. aus Algebra und Zahlentheorie.

Lerninhalte	Hinweise
Zählen mit der Summenregel für nicht mehr als drei Mengen.	<p>Problemstellungen, die unter Benutzung z. B. folgender Gleichung gelöst werden können:</p> $ A \cup B = A + B - A \cap B $ <p>Ein geeignetes Modell: Venn-Diagramm.</p>

Zählen mit der Produktregel für wenigstens die folgenden drei Fälle:

- geordnete Auswahl ohne Zurücklegen.
- geordnete Auswahl mit Zurücklegen.
- ungeordnete Auswahl ohne Zurücklegen (Binominalentwicklung/Pascalsches Dreieck).

Als Modell kommen in Frage: Anzahlbaum (Wegenetze, bei denen an k Knotenpunkten n_k Entscheidungsmöglichkeiten vorhanden sind), Urnenmodell, Platzmodell (Anzahl der Möglichkeiten, n nummerierte Plätze mit k gleichartigen Elementen zu besetzen).

Alternative 3: Zahlentheoretische Fragestellung

Es soll auf propädeutischer Ebene eine Einführung in Fragestellungen der Zahlentheorie erfolgen. Dabei sind die Probleme so auszuwählen, dass Überschneidungen mit dem Erweiterungsgrundkurs „Zahlentheorie“ möglichst vermieden werden.

Lerninhalte	Hinweise
<p>Ausgewählte Probleme aus der Zahlentheorie:</p> <ul style="list-style-type: none"> – Primzahlen – Kongruenzen – Euklidischer Algorithmus 	<p>Es sind Fragestellungen aus mindestens zwei der genannten Gebiete zu bearbeiten. Es bietet sich an, z. B. geeignete Aufgaben aus dem Bundeswettbewerb für Mathematik als Einstieg einer problemorientierten Sequenz zu wählen.</p>

Alternative 4: Inversion am Kreis; ausgewählte Kurven in Polarkoordinatenstellung

Ziel des Lernabschnitts ist es, dem Schüler einige geometrische Probleme vorzustellen und ihm Einblick zu ihrer Behandlung mit für ihn neuen Methoden zu geben. Im Rahmen der zur Verfügung stehenden Zeit können natürlich nur einige Kurven behandelt werden, die vor allem unter den Gesichtspunkten ihrer Darstellbarkeit durch Polarkoordinaten, einer Erzeugung durch Kreisinverson oder einer späteren Abbildung durch Kreisinverson ausgewählt werden sollten. (Kurven in Polarkoordinatendarstellung lassen sich vom Schüler leicht punktweise zeichnen.) Einer eventuell rein geometrischen Einführung der Kreisinverson sollte schnell die Einbeziehung des Koordinatensystems folgen. Die Behandlung von Kreisinverson und Kurven lässt sich dann weitgehend integrieren.

Ein Rückgriff auf den Lernabschnitt „Komplexe Zahlen“ ist möglich, jedoch nicht erforderlich und ist zu vermeiden, wenn Schüler erst im zweiten Schulhalbjahr mit dem Profilkurs Mathematik beginnen.

Lerninhalte	Hinweise
Inversion am Kreis: Definition, einfache Eigenschaften; Abbildungsgleichungen im Koordinatensystem mit Polar- und kartesischen Koordinaten.	Bei der Inversion im Koordinatensystem sollte grundsätzlich der Mittelpunkt des Inversionskreises im Ursprung liegen.
Abbildung einfacher Figuren durch Kreisinverson.	Beispiele: Geraden, Kreise, Hyperbel ($y \cdot x = c$), Parabel ($y = ax^2$).

Einige Kurven in
Polarkoordinatendarstellung.

Beispiele (zur Auswahl):
Kreis in Ursprungslage;
Ellipse, deren einer Brennpunkt im Ursprung
liegt ($r = \frac{a^2 - e^2}{a - e \cos j}$, durch
„Gärtnerkonstruktion“ erzeugbar;
Kardioide ($r = a(l + \cos j)$), als Rollkurve
erzeugbar); Pascalsche Schnecke
 $r = a + b \cdot \cos j$, durch Kreisinversion einer
Ellipse - siehe oben - erzeugbar);
Parabel, deren Brennpunkt im Ursprung liegt
(durch Kreisinversion der Kardioide - siehe oben
- erzeugbar);
Lemniskate (durch Kreisinversion der Hyperbel
mit $x \cdot y = c$ erzeugbar);
Zissoide (durch Kreisinversion der Parabel mit
 $y = ax^2$ erzeugbar);
Strophoide ($r = \frac{-b \cdot \cos 2j}{\cos j}$, durch Kreis-
inversion einer Hyperbel mit $x \cdot y = c$ erzeug-
bar, wenn die Hyperbel mit einem Scheitel in
den Ursprung verschoben wird).

Alternative 5: Ausgewählte mathematische Themen im Zusammenhang mit dem Computer

In dieser Unterrichtseinheit bietet sich die Möglichkeit, allen Schülern an Hand mathematischer Probleme so weit Kenntnisse in algorithmischer Aufbereitung und Anwendung auf einem Rechner zu vermitteln, dass in den Folgekursen ein gezielter Rechneinsatz möglich ist. Innerhalb dieses Rahmens ist es weder möglich noch intendiert, eine Einführung in die Programmierung oder eine Schematisierung von Entwürfen anders als im unmittelbaren Zusammenhang mit den mathematischen Problemen zu behandeln. Die Erstellung von Programmen ist nicht Selbstzweck; vielmehr dient die Nutzung des Rechners der Erweiterung des mathematischen Blickfeldes. Auf eine mögliche Überschneidung dieser Alternative mit dem Unterricht im Wahlpflichtfach ist zu achten.

Lerninhalte	Hinweise
Grundlagen der Näherungs- und Fehlerrechnung.	Für einen sinnvollen Taschenrechner- und Computereinsatz ist die Vermittlung einiger Grundlagen der Näherungs- und Fehlerrechnung notwendige Voraussetzung. Das Thema kann in Verbindung mit den folgenden Problemen oder z. B. der Intervallhalbierungsmethode zur angenäherten Bestimmung von Nullstellen behandelt werden.

Hornerschema

- einfaches Hornerschema
- Berechnung von Werten ganzrationaler Funktionen

- Zerlegung eines Polynoms für eine Stelle a Es gilt $f(x) = (x - a)g(x) + f(a)$
mit $\text{Grad}(g) = \text{Grad}(f) - 1$.
 - Anwendung des Verfahrens zur Umwandlung von Zahlen aus anderen Zahlensystemen ins Dezimalsystem Beispiel: $f(x) = 1x^3 + 0x^2 + 1x + 1$. $f(2)$ liefert die Umwandlung der Dualzahl 1011 in die Dezimalzahl 11.
 - erweitertes Horner Schema; Berechnung von Werten der 1. und 2. Ableitung ganzrationaler Funktionen. Man entwickle etwa eine ganzrationale Funktion 3. Grades an einer Stelle x mehrmals nach dem Horner Schema.
- Wertetafeln zur Zeichnung von Funktionsgraphen und Graphen von Ableitungsfunktionen. Gegebenenfalls Verwendung eines Plotters oder Grafikterminals. Auf die Programmierung von Plotter-Programmen durch Schüler sollte verzichtet werden. Durch Variation der Parameter einer Funktion kann der Schüler seine Kenntnisse über Funktionsgraphen und Zusammenhänge mit den Graphen der Ableitungsfunktion vertiefen.

Kursphase: Grundkurse

Übersicht und allgemeine Hinweise

	Stunden		Stunden
Kurs 1: ma-1	45	Integralrechnung	25
		Trigonometrische Funktionen	20
Kurs 2: ma-2	45	Exponentialfunktion, Logarithmus	30
		Lineare Gleichungssysteme	15
Kurs 3: ma-3	45	Analytische Geometrie	30
		Gebrochenrationale Funktionen	15
Kurs 4: ma-4	35	Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung	15
		Weiterführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung	20

Der didaktische Aufbau der vier Grundkurse geht von dem Konzept aus, den Stoff verschiedener Sachgebiete über mehrere Kurshalbjahre zu verteilen. Dadurch wird u. a. eine immanente Wiederholung ermöglicht und die Vorbereitung auf die Abiturprüfung erleichtert. Darüber hinaus soll hierdurch auch die Einbeziehung sachgebietsübergreifender Aspekte ermöglicht werden.

Die Kurse können wegen des didaktischen Aufbaus nur in der Kursfolge 1 – 2 – 3 – 4 durchlaufen werden.

Integralrechnung

(25 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt:

- Es sind mehrere Zugänge zum bestimmten Integral möglich. Auch bei einem anderen als dem hier dargestellten Weg muß deutlich werden, dass das bestimmte Integral als Grenzwert von Folgen von Ober- bzw. Untersummen berechenbar ist.
- Bei den hier auftretenden Flächen wird die Existenz des Flächeninhalts jeweils vorausgesetzt; deshalb steht die Berechnung von Flächeninhalten im Vordergrund und keinesfalls das Problem, den Flächeninhalt erst zu definieren.
- Der Gedanke der Approximation mit Hilfe von Rechtecken ist als wesentliche Idee herauszustellen.
- Der Begriff der Stetigkeit soll nicht thematisiert werden.

Lerninhalte

Für monotone Funktionen bei vorgegebener Intervallunterteilung Ober- und Untersummen angeben und grafisch veranschaulichen können.

Flächeninhalte unter Grafen einfacher monotoner Funktionen berechnen können.

Eine Definition des bestimmten Integrals kennen. Bestimmte Integrale grafisch deuten können.

Den Begriff der Stammfunktion kennen und überprüfen können, ob eine vorgegebene Funktion Stammfunktion einer anderen ist. Wissen und erläutern können, dass Flächeninhaltsfunktionen zu (stetigen) Funktionen Stammfunktionen der Ausgangsfunktion sind.

Die Formel

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$(F'(x) = f(x))$ kennen und anwenden können.

Lerninhalte

Flächeninhalte für Flächen unter Funktionsgraphen.

Approximation von Flächen mit Hilfe von Rechtecken; Ober- und Untersummen.

Einschachtelung von Flächeninhalten durch Ober- und Untersummen für auf dem betrachteten Intervall monotone Funktionen und äquidistante Intervalleinteilungen; Flächeninhalt als innere Zahl einer Intervallschachtelung.

Das bestimmte Integral.

Unterschied zwischen bestimmten Integral und Flächeninhalt.

Rechenregeln für bestimmte Integrale (Linearität, Additivität).

Stammfunktion.

Flächeninhaltsfunktionen zu (stetigen) Funktionen als Stammfunktionen der Ausgangsfunktion (Hauptsatz).

Berechnung von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen.

Flächeninhalte berechnen können.

Flächeninhalte, auch für Flächen zwischen Funktionsgraphen mit mehr als zwei Schnittpunkten.

Trigonometrische Funktionen

(20 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- Die Ableitungsübungen zur Ketten- und Produktregel sollen mit ausgewählten Fragestellungen aus dem Bereich der Kurvendiskussion verbunden werden.
- Außermathematische Anwendungsmöglichkeiten der trigonometrischen Funktionen sollen bei der Aufgabenwahl bedacht werden.

Lerninhalte	Lerninhalte
Wissen, dass $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ gilt.	Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion. Hinweis: Benötigte Additionstheoreme können der Formelsammlung entnommen werden. Die Kenntnis der Kettenregel ermöglicht es, die Ableitung des Kosinus aus der des Sinus zu gewinnen.
Die Kettenregel kennen und anwenden können.	Kettenregel: Ableitungsübungen, z. B. $x \rightarrow 2 \cdot \sin(4x - 1)$, $x \rightarrow 0,5 \cdot \cos(x^2)$
Flächeninhalte für einfache trigonometrische Funktionen als bestimmte Integrale berechnen können.	Integration von \sin und \cos . Bestimmungen von Flächeninhalten für Funktionen wie $x \rightarrow 5 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \rightarrow 2x + \cos(2x)$ Hinweis: Hier ist nicht an Integration durch Substitution gedacht; die Kettenregel führt unmittelbar zum Auffinden einer Stammfunktion.
Die Produktregel kennen und anwenden können.	Produktregel; Ableitungsübungen, z. B. $x \rightarrow x \cdot \cos x$, $x \rightarrow (\sin x^2)$. Anwendungen.

Allgemeiner Hinweis zum Kurs ma-1

Die ersten drei Lerninhalte aus dem Lernabschnitt Exponentialfunktion/Logarithmus aus dem Kurs ma-2 können in die beiden Lernabschnitte des Kurses ma-1 integriert werden, insbesondere dann, wenn das erste Schulhalbjahr länger als das zweite ist.

Exponentialfunktion/Logarithmus

(30 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- Die hier gewählte Reihenfolge von Lerninhalten stellt nur eine Möglichkeit des didaktischen Aufbaus dar. Bei der Wahl eines anderen Weges ist auf Gleichwertigkeit des Anspruchsniveaus zu achten.
- In diesen Lernabschnitt sind Anwendungsbezüge in besonderem Maße einzubetten.
- Für Funktionsuntersuchungen und Anwendungsaufgaben (vergleiche die letzten beiden Lernziele) ist etwa die Hälfte der für diesen Lernabschnitt zur Verfügung stehenden Zeit vorzusehen.

Lernziele	Lerninhalte
Wissen, dass $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$ gilt (f differenzierbar; $f(x) \neq 0$).	Ableitung reziproker Funktionen. Hinweis: Die Ableitungsregel kann unter Anknüpfung an die Ableitung von x^{-1} mit Hilfe der Kettenregel gewonnen werden.
Die verallgemeinerte Potenzregel anwenden können.	Verallgemeinerung der Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ auf $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
Integrale der Form $\int_a^b x^{-n} dx$ berechnen können.	Integration von x^{-n} für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
Eigenschaften von Exponentialfunktionen kennen und für grafische Darstellungen nutzen können. Exponentialfunktionen für beliebige Basen ableiten können.	Exponentialfunktion: Definitions-, Wertemenge; grafische Darstellung in Abhängigkeit von der Basis; Monotonie. Ableitung von Exponentialfunktionen; die Zahl e als ausgezeichnete Basis.
Zu vorgegebenen Grafen die Grafen von Umkehrfunktionen zeichnen können.	Hinweis: Die Existenz der Ableitung an einer Stelle und die Existenz der Zahl e sollen der Anschauung entnommen werden. Umkehrfunktion; zeichnerische Gewinnung aus vorgegebenen Funktionsgraphen; Logarithmus- und Exponentialfunktionen als gegenseitige Umkehrfunktionen; In als ausgezeichnete Logarithmusfunktion.
Eigenschaften von Logarithmusfunktionen kennen.	Logarithmusfunktion: Definitions-, Wertemenge; grafische Darstellung in Abhängigkeit von der Basis; Monotonie.

Die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion kennen.

Wissen, dass $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ gilt.

Anwendungsaufgaben lösen können.

Funktionsuntersuchungen im Zusammenhang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen durchführen können.

Ableitung der Umkehrfunktion.

Hinweis:

Existenzfragen sollen nicht problematisiert werden.

Ableitung von \ln ;

Integration von x^{-1}

Wachstum und Zerfall; u. a. Ermittlung von Funktionsgleichungen empirisch gewonnener Tabellen.

Kurvendiskussion;

Beispiele wie: $x \rightarrow x \cdot e^{-x}$, $x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$;

dabei ist das jeweilige Grenzwertverhalten numerisch plausibel zu machen.

Flächeninhaltsberechnungen mit Exponential- und Logarithmusfunktionen bei leicht bestimmbar Stammfunktionen und ohne Integrationsmethoden.

Lineare Gleichungssysteme

(15 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- In diesem Abschnitt sollen die Schüler lernen, in Verbindung mit Anwendungen lineare Gleichungssysteme mit m Gleichungen und n Variablen sicher zu lösen.
- Durch abwechslungsreiche Wahl von m und n soll die Bearbeitung einer Vielfalt von linearen Gleichungssystemen erreicht werden.
- Die Begriffe „Lineare Abhängigkeit“ und „Lineare Unabhängigkeit“ stehen für diesen Lernabschnitt nicht zur Verfügung.
- Der Gebrauch von Determinanten ist nicht vorgesehen.

Lernziele

Lineare Gleichungssysteme mit m Gleichungen und n Variablen (*auch* $m \neq n$, $m > 3$, $n > 3$) kennen und wissen, dass Lösungen n-Tupel sind.

Lerninhalte

Hinführung zu linearen Gleichungssystemen mit m Gleichungen und n Variablen über Anwendungsprobleme (Beispiele: siehe unten).

Den Gauß-Algorithmus kennen und lineare Gleichungssysteme mit seiner Hilfe lösen können.

Gauß-Algorithmus zur Erzeugung einer Dreiecksgestalt eines linearen Gleichungssystems mit m Gleichungen und n Variablen, auch für $m \neq n$. Elementarumformungen unter dem Aspekt, dass sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht ändert:

1. Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Zahl
2. Ersetzen einer Gleichung durch die Summe aus ihr und einem Vielfachen einer anderen Gleichung
3. Vertauschung von zwei Gleichungen.

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems angeben können.

Angabe der Lösungsmenge als Menge von n -Tupeln, dabei Berücksichtigung der drei Hauptfälle von leerer, einelementiger und mehrelementiger Lösungsmenge.

Hinweis:

Zwar soll dem Schüler bewusstgemacht werden, dass eine mehrelementige Lösungsmenge auf verschiedene Arten dargestellt werden kann, doch soll der Nachweis der Äquivalenz der Darstellungen nur exemplarisch erfolgen.

Übungen, dabei auch eindeutig lösbare Gleichungssysteme mit $m = n = 4$.

Anwendungsaufgaben mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen mathematisieren und lösen können.

Anwendungen.

Beispiele: Verkehrsnetze, Materialverbrauch, Bestimmung von Funktionen zu vorgegebenen Bedingungen, Mischungsprobleme, Schnittmengen von Geraden im \mathbb{R} .

Analytische Geometrie

(30 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- Schwerpunkt dieses Lernabschnitts sind das Skalarprodukt und seine Anwendungen. Die Lerninhalte der drei Blöcke A, B, C sind im Unterricht sinnvoll miteinander zu verbinden, also nicht nacheinander zu unterrichten.
- Die Einführung von Begriffen wie „Lineare Abhängigkeit“ bzw. „Lineare Unabhängigkeit“ ist nicht vorgesehen.
- An geeigneten Stellen ist das Lösen linearer Gleichungssysteme wieder aufzugreifen; dabei soll eine geometrische Deutung der linearen Gleichungssysteme in drei Variablen und ihrer Lösungsmengen erfolgen.
- Die Schulung des räumlichen Anschauungsvermögens - auch durch angemessene zeichnerische Darstellung geometrischer Objekte - ist in den Unterricht einzubeziehen.

Lernziele	Lerninhalte
A. Eine Definition für das Skalarprodukt zweier Vektoren im \mathbb{R}^3 kennen.	Skalarprodukt in den Formen $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos(\vec{a}, \vec{b})$
Regeln für das Rechnen mit dem Skalarprodukt kennen.	Rechenregeln für das Skalarprodukt.
Längen und Winkelgrößen mit Hilfe des Skalarproduktes berechnen können.	Berechnung von Längen und Winkelgrößen mit Hilfe des Skalarproduktes; Orthogonalität.
B. Geraden- und Ebenengleichungen im \mathbb{R}^3 in Parameterform bestimmen können.	Geradengleichung in Parameterform im \mathbb{R}^3 Ebenengleichung in Parameterform im \mathbb{R}^3 (auch Variation der Bestimmungsstücke einer Ebene).
Ebenengleichungen in Normalen- bzw. Koordinatenform bestimmen können.	Normalen- bzw. Koordinatenform der Ebenengleichung.
Verschiedene Formen von Ebenengleichungen wechselseitig umformen können.	Wechselseitige Umformungen der Parameterform in Normalen- bzw. Koordinatenform der Ebenengleichungen.
Den Abstand einer Ebene vom Ursprung mit Hilfe der hesseschen Normalenform bestimmen können.	Hessesche Normalenform der Ebenengleichung.
Kugelgleichungen bestimmen können.	Gleichung der Kugel in allgemeiner Lage.

C. Rechnerisch überprüfen können, ob vorgegebene Punkte auf einer Geraden, Ebene bzw. Kugel liegen.

Schnittpunktmengen bestimmen und geometrisch interpretieren können.

Gerade - Gerade,

Gerade - Gerade,

Ebene - Ebene.

Schnittwinkel berechnen können:

Gerade - Gerade

Gerade - Ebene.

Abstände berechnen können:

Punkt - Ebene,

Punkt - Gerade.

Mit Hilfe von Abstandsberechnungen entscheiden können, ob eine vorgegebene Ebene eine Kugel in einem Kreis schneidet, berührt oder meidet.

Lagebeziehungen geometrischer Objekte im \mathbb{R}^3 , insbesondere Bestimmung von Schnittpunktmengen, Schnittwinkeln und Abständen.

Vermischte Aufgaben komplexerer Art.

Hinweis:

Bei der Schnittpunktmengenbestimmung Ebene - Ebene sollte wenigstens eine Gleichung in Normalen- bzw. Koordinatenform vorliegen.

Gebrochenrationale Funktionen

(15 Stunden)

Lernziele	Lerninhalte
Die maximalen Definitionsmengen gebrochenrationaler Funktionen bestimmen können. Das Verhalten von gebrochenrationalen Funktionen für $x \rightarrow \pm \infty$ untersuchen und Asymptotengleichungen bestimmen können.	<p>Gebrochenrationale Funktion:</p> <ul style="list-style-type: none"> – maximale Definitionsmenge – Verhalten in der Umgebung von Definitionslücken – Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$ – Gleichungen von achsenparallelen und schrägen Asymptoten.
Die Quotientenregel kennen und anwenden können.	<p>Quotientenregel.</p> <p>Hinweis:</p> <p>Hier kann an die Ableitung von $\frac{1}{f}$ und die Produktregel angeknüpft werden</p>

Gebrochenrationale Funktionen diskutieren können.

Kurvendiskussion gebrochenrationaler Funktionen.

Beispiele wie

$$x \rightarrow \frac{x}{x^2 + 1}, x \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x + 2}, x \rightarrow \frac{1}{(x - 2)(x + 3)}$$

Hinweis:

Wendepunkte sollten nur dann bestimmt werden, wenn dies mit geringem Rechenaufwand möglich ist. Flächeninhaltsbestimmungen, die mit Kenntnissen aus den Kursen ma-1 und ma-2 möglich sind, können einbezogen werden.

Bei Übungen und Anwendungen ist eine der folgenden Alternativen zu berücksichtigen:

1. Untersuchung einparametrischer Scharen gebrochenrationaler Funktionen.
2. Extremwertaufgaben, die auf gebrochenrationale Funktionen führen.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

(15 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- Die Schüler sollen in Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt werden. An eine isolierte Behandlung von Ereignisalgebra und Kombinatorik ist nicht gedacht.
- Ein axiomatischer Aufbau ist nicht vorgesehen.
- Es ist die Beziehung zwischen einer Versuchsserie und einem mathematischen Modell mit dazugehöriger Wahrscheinlichkeitsbelegung bei Zufallsexperimenten zu klären.

Lernziele	Lerninhalte
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung kennen und anwenden können.	Zufallsversuch, Ergebnismenge, Ereignis, relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei endlicher Ergebnismenge, Laplace-Wahrscheinlichkeiten.
Zu einem Zufallsexperiment mit endlicher Ergebnismenge ein mathematisches Modell mit Wahrscheinlichkeitsbelegung angeben können.	
Die Formeln	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ und $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ kennen und anwenden können.	
Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Baumdiagrammen berechnen können.	Baumdiagramme, mehrstufige Zufallsexperimente, Pfadregeln.

Zählprinzipien zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in einfachen Fällen anwenden können.

Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe kombinatorischer Zählprinzipien in einfachen Fällen.

Weiterführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

(20 Stunden)

Hinweis zum Lernabschnitt

Auf kombinatorische Zählprinzipien soll nur noch für das Verständnis der Binominalverteilung zurückgegriffen werden.

Lernziele	Lerninhalte
Sachaufgaben mit Hilfe von Baumdiagrammen lösen können. Die Definition für die bedingte Wahrscheinlichkeit kennen und bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen können.	Anwendungen unter Verwendung von Baumdiagrammen; bedingte Wahrscheinlichkeit. Verwendung der Formeln: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B),$ $P_B(A) \cdot P(B) = P_A(B) \cdot P(A).$
Den Begriff der Unabhängigkeit zweier Ereignisse.	Unabhängigkeit zweier Ereignisse.
Ein mehrstufiges Zufallsexperiment gegebenenfalls als Bernoulli-Kette erkennen können.	Bernoulli-Kette als n-malige unabhängige Wiederholung eines Zufallsexperimentes mit zwei Ergebnissen.
Die Binominalverteilung kennen und auf Sachprobleme anwenden können.	Binominalverteilung: $B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k};$ grafische Darstellung; Erwartungswert. Anwendungen, z. B. aus der beurteilenden Statistik.

Kursphase: Leistungskurse

Übersicht und allgemeine Hinweise

	Stunden		Stunden
Kurs 1: MA-1	75	Differentialrechnung, trigonometrische Funktionen: - Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit - Ableitungsregeln, Sätze und stetige/differenzierbare Funktionen, Funktionsuntersuchungen	15
			30
		Integralrechnung	30
Kurs 2: MA-2	75	Weiterführung der Integralrechnung	30
		Gebrochenrationale Funktionen	15
		Weiterführung der Differentialrechnung; Exponential- und Logarithmusfunktion	30
Kurs 3: MA-3	75	Lineare Gleichungssysteme	25
		Analytische Geometrie	35
		Wahlgebiet: Matrizen oder Kegelschnitte	15
Kurs 4: MA-4	75	Grundlegung der Stochastik	25
		Verteilung und Statistik	25
		Ergänzung und Vertiefung der Stochastik	25

In der Regel ist der Unterricht getrennt nach Jahrgängen in der Reihenfolge 1 – 2 – 3 – 4 durchzuführen.

Damit auch bei geringen Schülerzahlen Mathematik als Leistungsfach unterrichtet werden kann, ist der **didaktische Aufbau** der vier Leistungskurse so gestaltet, dass eine jahrgangsübergreifende Organisation möglich ist. Die Kurse können daher auch in der Reihenfolge 3 – 4 – 1 – 2 durchlaufen werden.

Differentialrechnung, trigonometrische Funktionen

(45 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- Bei der Behandlung der Grenzwerte von Funktionen soll der Folgengrenzwertbegriff aus der Einführungsphase aufgegriffen und gegebenenfalls präzisiert werden.
- Auf Abschätzungen mit der „ ε - ε -Methode“ kann verzichtet werden.
- Der Begriff der Ableitung ist aus der Einführungsphase zu übernehmen, gegebenenfalls zu präzisieren, keinesfalls jedoch neu zu definieren.

- Dem Ableitungsbegriff kommt im Unterricht gegenüber dem Stetigkeitsbegriff die größere Bedeutung zu.
- An geeigneten Stellen - etwa bei Beweisen - soll die Vollständigkeit der reellen Zahlen bewusst gemacht werden.
- In diesem Lernabschnitt stehen die trigonometrischen Funktionen im Vordergrund; dennoch sollen auch die dem Schüler schon vertrauten ganzrationalen Funktionen im Zusammenhang mit neuen Definitionen, Sätzen und Regeln herangezogen werden.

Lernziele

Lerninhalte

Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit (15 Stunden)

Eine Definition für den Grenzwert einer Funktion an einer Stelle angeben können. Vermutete Grenzwerte von Funktionen auf der Grundlage der Grenzwertdefinition als Grenzwerte nachweisen oder ablehnen können.

Grenzwertuntersuchungen, insbesondere an Definitionslücken.

Beispiele wie:

$$x \rightarrow \frac{\sin x}{x}, \quad x \rightarrow \frac{\cos x - 1}{x},$$

$$x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \frac{|x|}{x}$$

$$x \rightarrow x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Funktionsgrenzwerte von vorgegebenen Funktionen unter Rückgriff auf bekannte Grenzwerte und auf Folgengrenzwertsätze berechnen können.

Funktionsgrenzwerte bei Funktionen wie

$$x \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad x \rightarrow |x^2 - 4|,$$

$$x \rightarrow \begin{cases} x^3 + 1 & \text{für } x \geq 1 \\ x^2 + 1 & \text{für } x < 1 \end{cases}; \quad x \rightarrow \frac{(\sin x)^2}{x}$$

Übertragung der Grenzwertsätze für Folgen auf solche für Funktionen.

Eine Definition für die Stetigkeit einer Funktion angeben können.

Stetigkeit:

Die Stetigkeit der Funktionen sin und cos (mit Rückgriff auf die Definition dieser Funktionen am Einheitskreis) sowie der konstanten Funktion, der Identität und der Betragsfunktion nachweisen können.

- Definition
- Stetigkeit ausgewählter Funktionen
- stetige Fortsetzbarkeit
- Beispiel einer nicht stetigen und nicht stetig fortsetzbaren Funktion
- Verknüpfung einschließlich Verkettung stetiger Funktionen

Wissen, dass Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Verkettung stetiger Funktionen wieder stetige Funktionen sind.

Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit.

Wissen, dass jede differenzierbare Funktion stetig ist. An einem Beispiel begründen können, dass aus der Stetigkeit einer Funktion nicht ihre Differenzierbarkeit folgt.

Ableitungsregeln, Sätze über stetige/differenzierbare Funktionen, Funktionsuntersuchungen (30 Stunden)

$\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$ und $\tan' = 1 + (\tan)^2$ nachweisen können.

Produkt- und Quotientenregel nachweisen und anwenden können. Die Kettenregel kennen und anwenden können.

Funktionsuntersuchungen sinnvoll strukturieren und darstellen können und dabei adäquate Kriterien verwenden können.

Die nebenstehenden Sätze kennen und an geeigneten Beispielen grafisch interpretieren können

Beweise der nebenstehenden Sätze kennen und einen Beweis verständlich vorführen können.

Funktionen unter besonderen Aspekten untersuchen können.

Sachaufgaben mathematisieren und mit Hilfe der Analysis lösen können.

Ableitung von \sin , \cos und \tan .

Produkt-, Quotienten- und Kettenregel.

Verallgemeinerung der Potenzregel für Exponenten aus $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Funktionsuntersuchung mit trigonometrischen Funktionen.

Beispiele:

$$x \rightarrow a \sin(\mathbf{w} \cdot x - \mathbf{j}), \quad x \rightarrow (\cos x)^2,$$

$$x \rightarrow \sin 2x + \cos x.$$

Sätze für über einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktionen:

- Extremwertsatz
- Zwischenwertsatz

Sätze für über einem Intervall $[a, b]$ stetige und über $[a, b]$ differenzierbare Funktionen:

- Satz von Rolle
- 1. Mittelwertsatz.

Besondere Aspekte bei Funktionsuntersuchungen wie

- Monotonie und Ableitung
- stetige Differenzierbarkeit
- Null- bzw. Extremwertstellenbestimmung mit Hilfe des Newton-Verfahrens
- Parameter

an Beispielen wie:

$$x \rightarrow x \left(1 + x \cdot \cos \frac{1}{x} \right), \quad x \rightarrow x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$x \rightarrow \sin x \cdot \cos 2x, \quad x \rightarrow ax + \sin x.$$

Hinweis:

Der Unterschied zwischen lokalen und globalen Eigenschaften einer Funktion ist zu verdeutlichen.

Extremwert- und andere Anwendungsaufgaben, etwa aus Physik und Technik; dabei auch angemessene Festlegung von Definitionsmengen und Einbeziehung von Randstellen bei der Extremwertuntersuchung.

Integralrechnung

(30 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- Als Funktionen stehen im wesentlichen ganzrationale Funktionen, Potenzfunktionen und trigonometrische Funktionen zur Verfügung.
- Auf Sätze über stetige Funktionen ist an den erforderlichen Stellen bewusst zurückzugreifen.

Lernziele	Lerninhalte
	Flächeninhaltsproblem für Flächen unter Graphen.
Zu vorgegebenen Funktionen Ober- und Untersummen grafisch veranschaulichen und als Näherungswerte für Flächeninhalte berechnen können.	Approximation von Flächeninhalten. Ober- und Untersummen für einfache Funktionen, etwa quadratische und kubische.
Für geeignete Intervallzerlegungen Flächeninhalte durch Unter- und Obersummen einschachteln und den Fehler angeben können.	Einschachtelung von Flächeninhalten und Fehlerbetrachtung für einfache Funktionen.
Flächeninhalte als Grenzwerte von Folgen von Ober- bzw. Untersummen berechnen können.	Flächeninhalt als Grenzwert.
Eine Definition des bestimmten Integrals angeben können.	Das bestimmte Integral für stetige Funktionen.
Begründen können, dass Funktionen, die auf abgeschlossenen Intervallen stetig und monoton sind, integrierbar sind.	Nachweis der Existenz des bestimmten Integrals für auf dem Integrationsintervall stetige, monotone Funktionen.
Erläutern können, dass es nicht-integrierbare Funktionen gibt.	Beispiel einer nicht-integrierbaren Funktion.
Bestimmte Integrale grafisch deuten können.	Unterschied zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt.
Einige Interpretationen des bestimmten Integrals in Anwendungssituation kennen.	Beispiele wie Arbeit, Weg im v-t-Diagramm, Ladung, Volumen, Mittelwerte.
Regeln für das Rechnen mit bestimmten Integralen kennen.	$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx =$ $\alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx ;$ $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx ;$ $\int_a^a f(x) dx = 0 ; \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx ;$

Den Mittelwertsatz der Integralrechnung beweisen können.

Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beweisen können.

Integralfunktion,

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad (a \leq x \leq b, f \text{ auf } [a, b] \text{ stetig}).$$

Den Begriff der Stammfunktion kennen und überprüfen können, ob eine vorgegebene Funktion Stammfunktion einer anderen ist.

Stammfunktion;
Unbestimmtes Integral.

Beweisen können, dass die Differenz von zwei Stammfunktionen zu einer auf einem Intervall definierten Funktion stets eine konstante Funktion ist.

Die Formel

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$(F'(x) = f(x))$$

begründen und anwenden können.

Berechnung von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen.

Flächeninhalte berechnen können

Inhalte von Flächen zwischen Graphen.

Das Verfahren der partiellen Integration begründen und verständlich anwenden können.

Partielle Integration bei Stammfunktionen und bestimmten Integralen.

Allgemeiner Hinweis zum Kurs

Für Schüler, die diesen Kurs bei jahrgangsübergreifendem Unterricht im vierten Kurshalbjahr besuchen, entfallen der Lernabschnitt „Gebrochenrationale Funktionen“ und Teile des Lernabschnitts „Weiterführung der Integralrechnung“.

Weiterführung der Integralrechnung

(30 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- Hier werden fünf voneinander relativ unabhängige Themen der Integralrechnung genannt, die nicht unbedingt zeitlich aufeinanderfolgend unterrichtet werden müssen.
- Die Integrationsverfahren sind mit den in den Leistungskursen MA-1 und MA-2 zu behandelnden Funktionen zu verbinden. Deshalb sind diese Verfahren im Leistungskurs MA-2 wieder aufzugreifen oder im Falle der Neueinführung im Leistungskurs MA-2 im Zusammenhang mit neuen Funktionen - unter Einbeziehung der bereits bekannten Funktionen - zu behandeln.

Lernziele	Lerninhalte
Das Verfahren der Integration durch Substitution begründen und verständlich anwenden können.	Integration durch Substitution bei Stammfunktionen und bestimmten Integralen.
Die Simpson-Regel zur näherungsweisen Berechnung bestimmen können.	Numerische Integration: Keplersche Fassregel - Simpson-Regel; dabei auch Erörterung von Genauigkeitsfragen.
Rauminhalte von Drehkörpern mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können	Rauminhalte von Drehkörpern; dabei auch solche, die durch Rotation der Graphen einfacher Wurzelfunktionen entstehen, insbesondere Kugel, Paraboloid und Ellipsoid.
Die Formel für die Bogenlänge erläutern und anwenden können.	Bogenlänge von Kurvenstücken $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx ;$ exakte Berechnung in einfachen Fällen, sonst numerische Integration.
Uneigentliche Integrale kennen und berechnen können.	Uneigentliche Integrale.

Gebrochenrationale Funktionen

(15 Stunden)

Hinweis zum Lernabschnitt

Die für diesen Lernabschnitt vorgesehene Stundenzahl ist relativ gering. Die Anzahl der behandelten Aufgaben, ihr Schwierigkeits- bzw. Komplexitätsgrad sollte entsprechend beschränkt werden.

Lernziele	Lerninhalte
Eine Definition der gebrochenrationalen Funktion angeben können.	Gebrochenrationale Funktionen und ihre besonderen Eigenschaften:
Zu vorgegebenen gebrochenrationalen Funktionen die Art von Definitionslücken charakterisieren und asymptotische Funktionen bestimmen können.	<ul style="list-style-type: none"> – maximale Definitionsmenge – Verhalten in der Umgebung von Definitionslücken (stetige Ergänzzbarkeit, Pole) – Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$, asymptotische Funktionen (auch nichtlineare).
Den Grobverlauf gebrochenrationaler Funktionen auch ohne Differentialrechnung u. a. aus der Kenntnis von Definitionslücken, Nullstellen und asymptotischem Verhalten skizzieren können.	Untersuchung gebrochenrationaler Funktionen und ihrer Graphen; dabei Berücksichtigung einparametrischer Scharen.

Gebrochenrationale Funktionen mit Hilfe der Differentialrechnung untersuchen können.

Bestimmte Integrale gebrochenrationaler Funktionen in einfachen Fällen berechnen können.

Extremwertaufgaben lösen können.

Bestimmte Integrale - wie z. B.:

$$\int_a^b \frac{x^2 + 1}{x^2} dx -$$

unter Berücksichtigung der bisher zur Verfügung stehenden Integrationsregeln.

Extremwertaufgaben, die auf gebrochenrationale Funktionen führen.

Weiterführung der Differentialrechnung; Exponential- und Logarithmusfunktion

(30 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- Bei der Behandlung von Exponential- und Logarithmusfunktionen gibt es verschiedene Ansätze und verschiedene Reihenfolgen. Die hier angegebenen Lernziele und Lerninhalte sollen keinen bestimmten didaktischen Aufbau widerspiegeln. Der Lehrer muss sich für ein eigenes Konzept entscheiden.
- Je nach dem gewählten didaktischen Aufbau sind an geeigneten Stellen Existenz- bzw. Vollständigkeitsfragen einzubeziehen.
- Dem theoretischen Aufbau einerseits und den konkreten Funktionsuntersuchungen und Anwendungen andererseits ist etwa die gleiche Zeit zu widmen.

Lernziele

Wissen und begründen können, dass für die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} zu einer Funktion f gilt:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \text{ mit } y = f(x).$$

Den Zusammenhang zwischen Definitionsmengen von f und f^{-1} kennen.

Potenzfunktionen mit Exponenten aus $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ableiten können.

Wurzelfunktionen untersuchen und ihre Graphen über der maximalen Definitionsmenge zeichnen können.

Lerninhalte

Ableitungsregel für Umkehrfunktionen.

Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit Exponenten aus $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Untersuchung von Wurzelfunktionen, dabei auch Untersuchung von f und f' am Rande der jeweiligen Definitionsmengen. Anwendungsaufgaben zu Wurzelfunktionen.

Einen Weg zur Gewinnung der Exponentialfunktion \exp_e oder der Logarithmusfunktion \ln kennen und darstellen können.

Definitions- und Wertemengen von Exponential- und Logarithmusfunktionen abgeben und die zugehörigen Graphen in Abhängigkeit von der Basis

a ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) zeichnen können.

Wissen, dass Exponential- und Logarithmusfunktionen zur gleichen Basis Umkehrfunktionen zueinander sind.

Wissen, dass $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gilt

\exp_a und \log_a ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) ableiten können.

Funktionalgleichungen für Exponential- und Logarithmusfunktionen kennen und begründen können.

Wissen, dass $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ gilt.

Die Regeln von de l'Hospital kennen und anwenden können; exemplarisch eine der Regeln begründen können.

Funktionsuntersuchungen im Zusammenhang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen durchführen können.

Sachaufgaben, die auf einfache gewöhnliche Differentialgleichungen führen, mathematisieren und die zugehörigen Differentialgleichungen lösen können.

Exponential- und Logarithmusfunktionen:

- Exponentialfunktionen in Anwendungssituationen
- Definitionsmenge, Wertemenge, Monotonie, Graphen
- die eulersche Zahl e
- Ableitungen
- Funktionalgleichungen
- \ln als Integralfunktion

$$\left(\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \right)$$

Die Regeln von de l'Hospital.

Funktionsuntersuchungen im Zusammenhang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen, dabei auch

- Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge
- Flächeninhaltsbestimmungen
- Anwendungen
- Funktionsscharen.

Einfache gewöhnliche Differentialgleichungen wie z. B.:

$$y' = ay; y'' + ay = 0.$$

Mögliche Anwendungssituationen:

- Wachstum
- Zerfall
- Abkühlung
- Raketengeschwindigkeit
- Elastizität.

Allgemeine Hinweise zum Kurs

- Die Lerninhalte „Matrizen“ und Kegelschnitte“ sind Alternativen; einer der beiden Abschnitte ist nach Wahl des Lehrers verbindlich.
- Bei der Unterrichtsplanung muss der Lehrer bei der Anordnung und Verknüpfung der Lerninhalte - auch solcher verschiedener Lernabschnitte - ein eigenes didaktisches Konzept entwickeln. Das gilt in besonderem Maße bei der Wahl des Lernabschnittes „Matrizen“; hier ist z. B. eine Integration in den Lernabschnitt „Lineare Gleichungssysteme“ möglich.
- Eine isolierte Behandlung der Struktur von Vektorräumen ist nicht vorgesehen. Die geforderten Begriffsbildungen sollen im Zusammenhang mit anderen Lerninhalten entwickelt werden, z. B. im Lernabschnitt über lineare Gleichungssysteme.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

(25 Stunden)

Hinweis zum Lernabschnitt

Die genannten Lerninhalte beschreiben drei Abstraktionsebenen:

1. Berechnung von Lösungsmengen
2. Untersuchung des Aufbaus des vorliegenden LGS und der Auswirkung auf die Lösungen
3. Präzisierung der Begriffsbildung, Strukturierung.

Damit ist ein genetischer Aufbau der Unterrichtsreihe intendiert. Die Lerninhalte können jedoch auch anders angeordnet werden, etwa im Sinne eines mehr fachsystematischen Vorgehens.

Lernziele	Lerninhalte
LGS mit dem Gauß-Algorithmus lösen können.	Probleme, die auf umfangreiche LGS führen, n -Tupel als Vektoren.
Begründen können, dass Elementarumformungen die Lösungsmenge des LGS nicht ändern.	Gauß-Algorithmus: <ul style="list-style-type: none">– LGS mit einelementiger, mehrelementiger oder leerer Lösungsmenge
Beweisen können, dass jede Lösung eines inhomogenen LGS als Summe einer bestimmten Lösung des inhomogenen Systems und einer geeigneten Lösung des zugehörigen homogenen Systems darstellbar ist.	<ul style="list-style-type: none">– Elementarumformungen als Äquivalenzumformungen des LGS– Zusammenhang der Lösungsmengen von inhomogenen und zugehörigen homogenen LGS.
Eine Definition für lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren kennen; Untersuchungen hinsichtlich dieser Eigenschaften durchführen können.	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, geometrische Deutung.

Den Begriff des Ranges eines LGS kennen.
Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit inhomogener LGS kennen und benutzen können.

Rang eines LGS; notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit eines LGS; Klassifizierung der Lösungsmengen homogener LGS.

Wissen, dass sich jeder Lösungsvektor eines homogenen LGS mit n Variablen und vom Rang r als Linearkombination von $(n - r)$ linear unabhängigen Vektoren darstellen lässt.

Den Begriff des reellen Vektorraums kennen und Beispiele für Vektorräume nennen können.

Vektorraum;

Beispiele für Vektorräume; auch geometrische Deutung des \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 sowie von Teilräumen.

Die Begriffe Erzeugendensystem, Basis und Dimension kennen und anwenden können.

Erzeugendensystem, Basis, Dimension.

Anwendungsaufgaben mit Hilfe von LGS mathematisieren und lösen können.

Anwendungen.

Hinweis:

Man berücksichtige hier Probleme aus den anderen Themenkreisen des Kurses,

Analytische Geometrie

(35 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- Der Lernabschnitt baut auf der im Fundamentalbereich der Einführungsphase behandelten analytischen Geometrie auf, für die ein Viertel des Unterrichts im Fundamentalbereich vorgesehen ist.
- Die Inhalte des Lernabschnitts sind im Rahmen komplexer Aufgaben - je nach Lernfortschritt - sinnvoll miteinander zu verbinden.

Lernziele

Eine Definition für das Skalarprodukt zweier Vektoren kennen und die Gleichwertigkeit der nebenstehenden Darstellungsformen begründen können.

Lerninhalte

Das Skalarprodukt in den Formen

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

und

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

Regeln für das Rechnen mit dem Skalarprodukt kennen und beweisen können.

Rechenregeln für das Skalarprodukt.

Das Skalarprodukt zur Berechnung von Maßen bei geometrischen Aufgaben verwenden können.

Maßberechnungen, u. a. im Zusammenhang mit:

- Betrag eines Vektors, Normierung
- Entfernung von Punkten und Längen von Strecken
- Winkel zwischen Geraden bzw. Strecken, Orthogonalität
- Abstand eines Punktes von einer Geraden; Höhenbestimmung in ebenen Figuren im \mathbb{R}^3 ; Inhalt eines Dreiecks.

Eine Definition des Vektorprodukts und einige seiner Eigenschaften kennen.

Das Vektorprodukt.

Gleichungen in Normalenform und in Parameterform für die Punkte einer Ebene erläutern und geometrisch deuten können.

Gleichungen für Ebenen im \mathbb{R}^3 Normalenform (Koordinatenform; Hesseform), Parameterform.

Ebenengleichungen in Normalenform (Koordinatenform) und Parameterform bestimmen können. Verschiedene Formen von Ebenengleichungen ineinander umformen können.

Gleichungen für Ebenen im \mathbb{R}^3 bei unterschiedlicher Vorgabe der Bestimmungsstücke.

Lagebeziehungen untersuchen, Abstände und Winkel berechnen und die Ergebnisse geometrisch interpretieren können.

Lagebeziehungen (z. B. Inzidenz) und Maße (z. B. Abstände, Winkelgrößen):

- Punkt und Ebene (auch hessesche Normalenform)
- Gerade und Ebene (auch Spurpunkte)
- Ebene und Ebene (auch Spurgeraden)
- Gerade und Gerade.

Wahlgebiet

(15 Stunden)

Alternative 1: Matrizen

Hinweise zum Lernabschnitt

- Bei der Unterrichtsgestaltung ist an eine Verbindung von Anwendungsproblemen und den dazugehörigen Theorieanteilen gedacht.
- In Anwendungen hat die Multiplikation von Matrizen gegenüber der Addition und S-Multiplikation eine größere Bedeutung; dem ist im Unterricht Rechnung zu tragen.

Lernziele	Lerninhalte
Den Begriff der (m, n) -Matrix kennen.	(m, n) -Matrizen.
Matrizen addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren können.	Matrizenaddition, S-Multiplikation.
Matrizen multiplizieren können. Matrizen und Matrizenmultiplikation anwenden können.	<p>Matrizenmultiplikation; als Beispiele kommen in Frage:</p> <ul style="list-style-type: none"> – zweistufiger Produktionsprozess (Materialverflechtung) – mehrstufige Prozesse, Matrixpotenz (Übergangsmatrizen bei Populationsentwicklungen) – Darstellung von LGS – Permutationsmatrizen (Vertauschen von Zeilen bzw. Spalten bei LGS, endliche Gruppen) – Lineare Abbildungen des Raumes R^n in den Raum R^m. – affine Abbildungen.
Einige Gesetzmäßigkeiten für das Rechnen mit Matrizen kennen und beweisen können.	Assoziativgesetz der Multiplikation; Nullmatrix, Einheitsmatrix; Nichtkommutativität der Multiplikation; Distributivgesetz; Vektorraumeigenschaften.
Den Begriff der inversen Matrix kennen.	Inverse Matrix.
Inverse Matrizen verwenden und mit Hilfe des Gauß-Algorithmus berechnen können.	<p>Als Anwendungen kommen in Frage:</p> <ul style="list-style-type: none"> – Permutationsmatrizen – Abbildungen – Input-Output-Analyse – Stücklistenproblem.

Alternative 2: Kegelschnitte

Hinweise zum Lernabschnitt

- In diesem Lernabschnitt ist es zweckmäßig, vornehmlich mit kartesischen Koordinaten zu arbeiten.
- Findet der Unterricht des Kurses MA-3 im 3. Kurshalbjahr statt, so wird empfohlen, Bezüge zur Analysis herzustellen.

Lernziele	Lerninhalte
Die Art eines Kegelschnittes aus der Lage der Schnittebene relativ zum Doppelkegel erläutern können.	Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel als Schnittmenge eines Doppelkegels und einer Ebene.

Die Brennpunkte von Ellipse, Parabel und Hyperbel als charakteristische Punkte der Kegelschnittsflächen in Verbindung mit den zugehörigen Abstandseigenschaften für Kegelschnittspunkte kennen.

Brennpunkte von Ellipse, Parabel und Hyperbel; Dandelin'sche Kugeln; Konstruktion von Kegelschnittspunkten aus Abstandsbedingungen.

Die Gleichungen von Ellipse, Parabel und Hyperbel in Hauptachsenform herleiten und verwenden können.

Gleichungen für Kegelschnitte in kartesischen Koordinaten; Hauptachse, Nebenachse, lineare und numerische Exzentrizität.

Zusammenhang der Kegelschnitte Parabel und Hyperbel mit den Graphen quadratischer Funktionen und der Antiproportionalität; die Ellipse als senkrecht affines Bild des Kreises.

Das asymptotische Verhalten der Hyperbel begründen und bei der grafischen Darstellung einer Hyperbel benutzen können.

Asymptoten der Hyperbel.

Allgemeiner Hinweis zum Kurs

Für Schüler, die den Kurs im vierten Kurshalbjahr besuchen, sind nur die ersten beiden Lernabschnitte vorgesehen. Der Lernabschnitt „Ergänzung und Vertiefung der Stochastik“ ist bei jahrgangsübergreifendem Unterricht mit Schülern des zweiten Kurshalbjahres zu behandeln, da für diese das ganze Schulhalbjahr zur Verfügung steht.

Grundlegung der Stochastik

(25 Stunden)

- Die ersten vier Lernziele stellen den Rahmen für ein vom Lehrer zu wählendes didaktisches Konzept für die Einführung in die Stochastik dar; mit der angegebenen Reihenfolge der vier Lernziele und der entsprechenden Lerninhalte ist kein Hinweis auf die unterrichtliche Abfolge beabsichtigt.
- Die Grundbegriffe sollten problemorientiert eingeführt werden.
- Es ist nicht an eine isolierte Behandlung von Ereignisalgebra und Kombinatorik gedacht.

Lernziele	Lerninhalte
Die beiden wesentlichen Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsbelegung kennen.	Die Gewinnung von Wahrscheinlichkeiten aus statistischen Daten (z. B. Versuchsreihen) oder auf Grund von Laplace-Annahmen.
Den Unterschied zwischen stochastischem Prozess und deterministischem Vorgang kennen.	Beispiele für stochastische Prozesse wie Glücksrad, Galtonbrett, Lotto, radioaktiver Zerfall.
Grundbegriffe der Stochastik kennen und anwenden können.	Zufallsversuch, Ergebnismenge, Ereignis, Gegenereignis, unmögliches Ereignis, sicheres Ereignis, Unvereinbarkeit von Ereignissen, relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit.

Zufallsexperimente simulieren und Näherungswerte für die Wahrscheinlichkeiten angeben können.

Zu Zufallsexperimenten mit endlicher Ergebnismenge ein mathematisches Modell mit Wahrscheinlichkeitsbelegung angeben und mit Wahrscheinlichkeiten - auch unter Zuhilfenahme von Zählprinzipien - rechnen können.

Den Zusammenhang zwischen bedingter Wahrscheinlichkeit und der Unabhängigkeit (zweier) Ereignisse kennen und erläutern können.

Mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Vierfeldertafeln, Baumdiagrammen oder Formeln bearbeiten können.

Simulation im Zusammenhang mit der Einführung, möglicherweise auch für Probleme, die sich erst später exakt lösen lassen.

Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit endlicher Ergebnismenge, Laplace-Wahrscheinlichkeiten.

Modelle wie Urne, Baumdiagramm, Stuhlreihe, Glücksrad, Galtonbrett.

Pfadregeln; Produktregel, Summenregel.

Feldertafel.

Unabhängigkeit (zweier) Ereignisse, bedingte Wahrscheinlichkeit, totale Wahrscheinlichkeit, Bayesformel.

Verteilungen und Statistik

(25 Stunden)

Lernziele

Den Begriff der Zufallsgröße kennen und für gegebene Zufallsgrößen deren Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie Erwartungswert und Varianz bestimmen können.

Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz.

Die Ungleichung von Tschebyschew kennen und für grobe Abschätzungen benutzen können.

Die Formel von Bernoulli kennen und begründen können. Die Binomialverteilung kennen sowie Erwartungswert und Varianz binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können.

Sachaufgaben mit binomial verteilten Zufallsgrößen, auch unter Verwendung stochastischer Tabellen, lösen können.

Einblick in Fragen und Verfahren der beurteilenden Statistik gewinnen.

Lerninhalte

Zufallsgröße als Funktion und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung.

Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz (z. B. Linearität des Erwartungswerts) in einer Auswahl, die auf die Verwendung bei speziellen Verteilungen ausgerichtet ist

Ungleichung von Tschebyschew.

Bernoulli-Ketten und binomialverteilte Zufallsgrößen; grafische Darstellung gegebener Binomialverteilungen; Erwartungswert und Varianz bei der Binomialverteilung.

Anwendungen zur Binomialverteilung.

Grundfragen der beurteilenden Statistik:

Aufgaben zu Hypothesentests lösen können. Hypothesentests (ein- und zweiseitig), Null- und Gegenhypothese, Fehler 1./2. Art, Signifikanzniveau, Annahme- und Ablehnungsbereich.

Ergänzung und Vertiefung der Stochastik

(25 Stunden; für Schüler im 2. Kurshalbjahr)

1. Fortführung der beurteilenden Statistik;

Einfache Parameterschätzungen; Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit (Konfidenzintervall).

2. Es ist mindestens ein weiteres Thema zu behandeln.

Insbesondere kommen in Frage:

- eine weitere Verteilung
- Markow-Ketten
- weitere Tests, wie z. B. χ^2 -Test

Kursphase: Erweiterungsgrundkurse

Allgemeine Hinweise

Erweiterungsgrundkurse können für Schüler der Leistungskurse eingerichtet werden; aber auch andere interessierte und leistungsfähige Schüler können teilnehmen. Das Anspruchsniveau ist an dem der Leistungskurse zu orientieren.

Erweiterungsgrundkurse enthalten andere Lerninhalte als die Leistungs- und Grundkurse. Einige Erweiterungsgrundkurse setzen voraus, dass die Schüler bereits an bestimmten Leistungs- oder Grundkursen teilgenommen haben; diese Erweiterungsgrundkurse dürfen nicht parallel zu den entsprechenden Leistungs- bzw. Grundkursen belegt werden. Geringe Kenntnisunterschiede lassen sich im Verlauf des Unterrichts ausgleichen.

Auf die explizierte Angabe von Lernzielen wird verzichtet. Die Lerninhalte sind so angegeben, dass der Lehrer einen großen Gestaltungsspielraum hat.

Es besteht die Möglichkeit, auch andere als die beschriebenen Erweiterungsgrundkurse durchzuführen, sofern die Genehmigung der für das Schulwesen zuständigen Senatsverwaltung erteilt wird.

Erweiterungsgrundkurs ma-Z.1: Inzidenzgeometrie

Lerninhalte

Einführung in die axiomatische Methode auf Grund eines einfachen Axiomensystems über die Inzidenz von Punkten und Geraden.

Axiome als Aussageform mit Subjekt- und Prädikatvariablen. Deutungen in verschiedenen, nicht isomorphen Modellen, unter besonderer Berücksichtigung endlicher Modelle.

Maßvoller Ausbau eines Satzsystems durch formales Schließen aus den Axiomen und seine Interpretation in den Modellen.

Klärung des Modellbegriffes.

Klärung der Beziehungen zwischen geometrischen und isomorphen algebraischen Modellen.

Behandlung der Problematik der Unabhängigkeit, Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems in exemplarischer Weise.

Erweiterungsgrundkurs ma-Z.2: Nichteuklidische Geometrie

Lerninhalte

Einführung in die hyperbolische Geometrie in Verbindung mit einer Klärung der Beziehungen zur absoluten Geometrie und zur euklidischen Geometrie; Diskussion der Bedeutung des Parallelenaxioms.

Vergleich elementarer geometrischer Zusammenhänge in der euklidischen mit denen in der hyperbolischen Geometrie, darunter auch: Winkel an Parallelen, Winkelsumme im Dreieck.

Einführung eines Modells der hyperbolischen Geometrie.

Ableitung charakteristischer Eigenschaften der hyperbolischen Geometrie aus Axiomen oder aus den euklidischen Eigenschaften des Modells.

Konstruktionsaufgaben innerhalb des Modells in exemplarischer Weise.

Erweiterungsgrundkurs ma-Z.3: Logik

Lerninhalte

Behandlung von Problemen der Aussagen- und Prädikatenlogik, dabei aufbauend auf den den Schülern bekannten Grundlagen über Aussagen und Aussageformen und ihren Verknüpfungen.

Beispiele für Sätze der Aussagenlogik, Tautologien.

Gebrauch von Quantoren, auch bei durch Verknüpfungen zusammengesetzten Aussageformen, Mengendiagramme.

Beispiele für logische Schlussformen, dabei auch Einbeziehung von Aussagen, die aus Aussageformen mit durch Quantoren gebundenen Variablen gebildet werden.

Klärung der Beziehung von Objekt- und Metasprache.

Die Einführung und Diskussion logischer Strukturen sollte weniger unter formalen und systematischen Aspekten, sondern in enger Verbindung mit inhaltlichen Problemen gesehen werden;

Sprachliche Analysen, u. a. bei logischen Rätseln, in Verbindung mit Übersetzungsübungen;

Untersuchung von Schlussfiguren anhand inhaltlicher Fragestellungen;

Gewinnung von Schlussfiguren aus konkreten Beispielen.

Ausblick auf weiterführende Probleme:
Rolle von Widersprüchen in Satzsystemen;
Diskussion einer Antinomie.

Erweiterungsgrundkurs ma-Z. 4: Zahlentheorie

Lerninhalte

Behandlung von Kongruenzen und Restklassen,
algebraische Operationen mit Kongruenzen bzw. Restklassen.

Sätze über Teilbarkeit,
euklidischer Algorithmus, Darstellung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen als Vielfachsumme der beiden Zahlen.

Lösungsmenge der Kongruenz $a \cdot x = b \pmod{m}$, Lösung diophantischer Gleichungen.

Prime Reste, Definition der eulerschen Funktion $\varphi(n)$,
Sätze von Fermat und Euler,
Ordnung eines Restes bezüglich eines Moduls.

Untersuchung der Perioden und Vorperioden in der Dezimaldarstellung rationaler Zahlen.

Erweiterungsgrundkurs ma-Z. 5: Numerische Mathematik

Ziel des Kurses ist es, anhand von ausgewählten Themen eine Einführung in einige grundlegende Verfahren und Methoden der numerischen Mathematik zu geben. Die Verfahren sind

- mathematisch zu entwickeln bzw. zu erläutern
- auf einem Rechner zu erproben
- mathematisch zu interpretieren.

Der Computer ist kein eigenständiger Unterrichtsgegenstand, die Erstellung von Programmen darf zeitlich nicht zu ausgedehnt werden. Der Unterricht muss verdeutlichen, dass Fehleruntersuchungen und Fehlerabschätzungen wesentliche Bestandteile von Näherungsverfahren sind.

Lerninhalte

Es sind mehrere verschiedene Verfahren zu behandeln. Insbesondere kommen folgende Themen in Frage:

- Interpolation von Funktionen, insbesondere Spline-Interpolation
- Tschebyschev-Approximation
- Methode der kleinsten Quadrate
- Iterative Lösung von linearen Gleichungssystemen
- Differenzengleichungen

Erweiterungsgrundkurs ma-Z. 6: Differentialgleichungen

Der Kurs setzt Kenntnisse aus den Leistungskursen MA-1, MA-2 bzw. aus den Grundkursen ma-1, ma-2 voraus.

Lerninhalte

Elementare Lösungsverfahren für spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung, lineare Differentialgleichungen (homogener und inhomogener Fall), Anwendungen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (homogener und inhomogener Fall), Anwendungen (etwa gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen).

Weitere spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Erweiterungsgrundkurs ma-Z. 7: Unendliche Reihen

Der Kurs setzt Kenntnisse aus den Leistungskursen MA-1, MA-2 voraus.

Lerninhalte

Konvergente und divergente Reihen, das Cauchy-Kriterium als notwendiges und hinreichendes Konvergenzkriterium.

Majoranten und Minoranten

Konvergenzkriterien

Potenzreihen und ihre Eigenschaften

Die Formel von Taylor

Approximation von Funktionen durch ganzrationale Funktionen Taylor-Reihen

Erweiterungsgrundkurs ma-Z. 8: Markowketten

Der Kurs setzt Kenntnisse aus dem Leistungskurs MA-4 voraus.

Lerninhalte

Behandlung von homogenen Markowketten, aufbauend auf den Kenntnissen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und unter Zugrundelegung der Begriffe: Zufallsvariable, Verteilung einer Zufallsvariablen, Erwartungswert; dabei im wesentlichen Beschränkung auf endliche Zustandsräume (endliche Markowketten).

Darstellung der Zustände und Übergangswahrscheinlichkeiten durch Grafen und Matrizen. Irrfahrtmodelle.

Berechnungen von Grenzwahrscheinlichkeiten:

Wahrscheinlichkeiten für das Erreichen absorbierender Zustände; stationäre Verteilungen.

Berechnungen von Erwartungswerten für Schrittzahlen, Wartezeiten und anderes.

Anwendung auf Probleme aus der Physik, Biologie und Wirtschaftsmathematik, u. a. auf die Populationsgenetik.