

## Lösungen zu Aufgabe C

### Berechnung eines Normaleneinheitsvektors

#### Lösungsweg 1:

Bestimmung einer Koordinatengleichung  $Ax + By + Cz + D = 0$  für die Ebene durch die Punkte  $A(1;1;-1)$ ,  $B(-1;0;2)$  und  $C(0,0,-1)$ . Es muss gelten:

$$\text{I: } A + B - C + D = 0$$

$$\text{II: } -A + 2C + D = 0$$

$$\text{III: } -C + D = 0$$

Es ergibt sich aus III:  $C = D$ , eingesetzt in II:  $A = 3C$  und schließlich aus I:  $B = -A = -3C$ . Eine Gleichung der Ebene ist also

$$3x - 3y + z + 1 = 0.$$

Somit ist  $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Normalenvektor, der Betrag dieses Vektors ist  $\sqrt{9+9+1} = \sqrt{19} \approx 4,359$ .

Als Normaleneinheitsvektoren ergeben sich  $\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,688 \\ -0,688 \\ 0,229 \end{pmatrix}$  und  $\vec{n}_2 \approx \begin{pmatrix} -0,688 \\ 0,688 \\ -0,229 \end{pmatrix}$ .

#### Lösungsweg 2 (unter Verwendung des Vektorproduktes):

Betrachtung der Richtungsvektoren  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  der Ebene und Berechnung ihres

Vektorproduktes  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Als Normaleneinheitsvektoren ergeben sich

wiederum  $\vec{n}_1 \approx \begin{pmatrix} 0,688 \\ -0,688 \\ 0,229 \end{pmatrix}$  und  $\vec{n}_2 \approx \begin{pmatrix} -0,688 \\ 0,688 \\ -0,229 \end{pmatrix}$ .

### Bestimmung der Koordinaten des Schwerpunktes des Dreiecks ABC

$$x_P = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1-1+0}{3} = 0, \quad y_P = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3}, \quad z_P = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-1+2-1}{3} = 0.$$

Der Schwerpunkt hat also die Koordinaten  $S\left(0; \frac{1}{3}; 0\right)$ .

### Darstellung eines Normaleneinheitsvektors

Der Vektor kann mithilfe des Befehls `verbindungsvektor (<x1,y1,z1>,<x2,y2,z2>, texture)` aus dem Paket `anageoL-ohneKam.inc` dargestellt werden. Dabei sind für `<x1,y1,z1>` die Koordinaten des oben bestimmten Schwerpunktes  $S$  und für `<x2,y2,z2>` die Summen der Koordinaten dieses Punktes und des darzustellenden Normaleneinheitsvektors einzusetzen.

Hinweis: Das Objekt `verbindungsvektor` ist in der Datei `anageoL-ohneKam.inc` definiert. Diese Datei muss sich daher im selben Ordner wie die POV-Ray-Datei befinden und mittels `#include "anageoL-ohneKam.inc"` eingebunden werden.

### Bestimmung des „Kameraeinheitsvektors“

Wir betrachten als Beispiel eine Kamera mit den Koordinaten `location <0,2,-6>`. Dann ergibt sich der Verbindungsvektor zwischen dem Schwerpunkt  $S$  und der Kamera:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat den Betrag  $\sqrt{349/9} \approx 6,227$ . Der „Kameraeinheitsvektor“ ist daher

$$\vec{b} = \frac{3}{\sqrt{349}} \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0,268 \\ -0,964 \end{pmatrix}.$$

### Bestimmung des „Lichtquelleneinheitsvektors“

Beispiel: Lichtquelle mit den Koordinaten `light_source{<-4,5,5> ...}`.

Verbindungsvektor zwischen dem Schwerpunkt  $S$  und dieser Lichtquelle:

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14/3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Betrag des Verbindungsvektors:  $\sqrt{16 + \frac{196}{9} + 25} = \frac{1}{3}\sqrt{565} \approx 7.923$

$$\text{„Lichtquelleneinheitsvektor“: } \frac{3}{\sqrt{565}} \begin{pmatrix} -4 \\ 14/3 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,505 \\ 0,589 \\ 0,631 \end{pmatrix}$$

- Siehe auch die Datei `Aufg-C-Reflexionsexp.pov`, in der die hier berechneten Werte verwendet (bzw. von POV-Ray selbst berechnet) werden.