

Gymnasium Albertinum Coburg

Kollegstufenjahrgang 2004/06

Facharbeit

aus dem Fach Mathematik

Thema:

'Malen nach Zahlen' - Das Raytracing-Verfahren

Verfasser: Sebastian Haaf
Leistungskurs: Mathematik
Kursleiter: StR Jäger
Abgabetermin: 27. Januar 2006

schriftliche Leistung (einfache Wertung):

Punkte: in Worten:

mündliche Prüfung (einfache Wertung):

Datum:

Punkte: in Worten:

Gesamtnote (doppelte Wertung):

Punkte: in Worten:

Unterschrift des Kursleiters, Datum der Abgabe beim Kollegstufenbetreuer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung.....	3
2 'Malen nach Zahlen' – Das Raytracing-Verfahren.....	4
2.1 Begriffsklärung: Raytracing.....	4
2.2 Szenenbeschreibung.....	5
2.3 Mathematische Grundlagen.....	5
2.3.1 Homogene Koordinaten.....	5
2.3.2 Affine Transformationen.....	6
2.3.2.1 Die Rotation.....	6
2.3.2.2 Die Translation.....	7
2.3.3 Produktbildung Vektor-Matrix.....	7
2.3.4 Matrixmultiplikation.....	7
2.4 Der Raytracingvorgang.....	9
2.4.1 Koordinatentransformation.....	9
2.4.2 Aufstellen der Projektionsebene	12
2.4.3 Schnittberechnungen.....	14
2.4.4 Farbberechnung durch lokale Beleuchtungsmodelle.....	15
2.4.4.1 Sichtbarkeitsuntersuchungen.....	15
2.4.4.2 Ambiente Beleuchtung (Umgebungslicht).....	16
2.4.4.3 Diffuse Beleuchtung	16
2.4.4.4 Spekulare Beleuchtung.....	17
2.4.4.5 Zusammenfassung der lokalen Beleuchtungskomponenten:...	18
2.4.5 Erweiterungen des Raytracingvorgangs.....	19
2.4.5.1 Reflektion	19
2.4.5.2 Transparenz und Brechung	20
3 Schlusswort.....	21
4 Literaturverzeichnis.....	22
5 Anhang.....	23
6 Erklärung.....	25

1 Einleitung

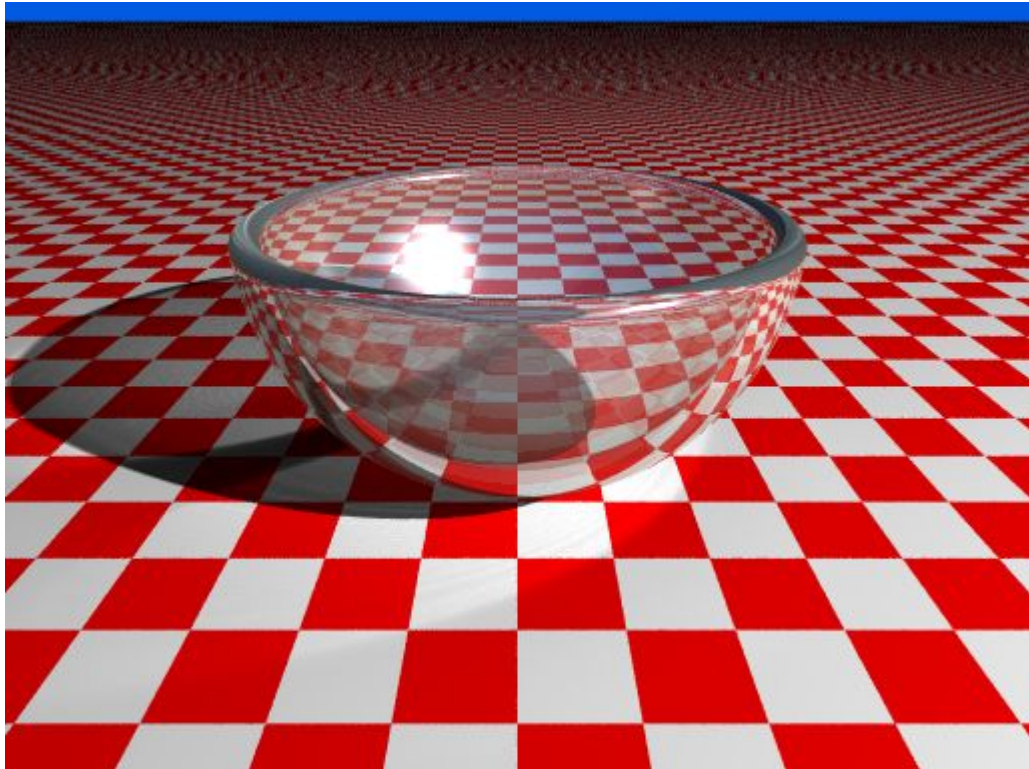


Abbildung 1

Mit dem Computer erzeugte Bilder wie dieses sind heutzutage keine Seltenheit mehr. 3D-Computergrafik begegnen wir ständig, sei es im Fernsehen, in der Werbung oder im Kino, wo sie auch als Special-Effect bezeichnet wird. Es werden dabei Bilder von verschiedensten Objekten erzeugt, die in den Film anschließend eingefügt werden, ohne dass der Betrachter dies erkennt. Ein Verfahren, das sich im Laufe der Zeit durchgesetzt hat, nennt sich Raytracing. Mittels Raytracing ist der Computer in der Lage, fotorealistische Bilder aus ihm gegebenen Vorgaben zu berechnen.

2 'Malen nach Zahlen' – Das Raytracing-Verfahren

2.1 Begriffsklärung: Raytracing

Raytracing besteht aus den beiden Worten „Ray“ (= engl. für Strahl) und „tracing“ (= engl. für verfolgen / Verfolgung) und kann daher mit dem Wort Strahlenverfolgung übersetzt werden. Doch wozu Strahlen verfolgen? In der 3D-Computergraphik soll aus einer Szenenbeschreibung ein möglichst fotorealistisches Bild künstlich erstellt werden. Raytracing war dabei der erste Algorithmus, der die Schattierungen von Objekten durch die Versendung von Strahlen und der Berechnung des Ausbreitungsverhaltens physikalisch korrekt darstellen konnte. Hierfür werden Lichtstrahlen als Geraden simuliert und berechnet, an welchem Objekt sie auftreffen und wie sie dabei reflektiert werden, wodurch nach und nach alle Pixel eines Bildes einen Farbwert zugewiesen bekommen. Verschiedene Programme sind in der Lage, anhand einer Szenenbeschreibung einer dreidimensionalen Szene das zweidimensionale Abbild zu berechnen. Es kommt ein rekursives Verfahren zum Einsatz, um Rechenzeit zu sparen: Die Strahlen werden nicht von der Lichtquelle, sondern vom Betrachter aus in die Szenerie gesandt, da sonst der Großteil der Strahlen zwar berechnet, aber nicht zum Bildaufbau beitragen würde.

Die Abbildung 1 zeigt eine einfache Szene, die im Grunde nur aus einer grünen Kugel, die auf einer roten Ebene liegt, besteht. Die Entstehung eines solchen Bildes soll nun erklärt werden.

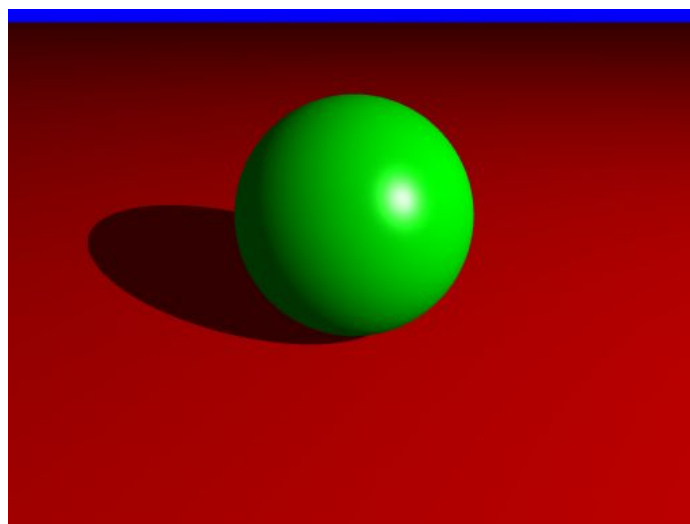


Abbildung 2

2.2 Szenenbeschreibung

Um ein Bild berechnen zu können, braucht man zunächst eine Szenenbeschreibung, die Folgendes umfasst:

- Ort und Größe der gewünschten Objekte sowie deren Oberflächeneigenschaften, zum Beispiel deren Farbigkeit,
- Definition einer oder mehrerer Lichtquellen,
- Kamera: Ort der Kamera (=Betrachterposition), Blickrichtung als Vektor oder Blickziel als Punkt und Öffnungswinkel.

Aus diesen Informationen kann nun ein Bild berechnet werden. Die Szenenbeschreibung von Abbildung 2 lautete:

- Grüne Kugel $k(M, r)$ mit Mittelpunkt $M(0; 1; 0)$ und Radius $r=1$,
- Rote X-Z-Ebene¹,
- Hintergrundfarbe: Blau,
- Weiße Lichtquelle bei $L(8; 7; -7)$,
- Kamera bei $B(0; 2,5; -4)$ ², mit Blickziel $Z(0; 1,5; -2)$ und einen Öffnungswinkel von 70° .

2.3 Mathematische Grundlagen

Um den Raytracingvorgang vollständig verstehen zu können, müssen zunächst einige mathematische Grundlagen geschaffen werden.

2.3.1 Homogene Koordinaten

Um in der 3D-Computergraphik alle Transformationen in einheitlichen Matrizen behandeln zu können, wurden die homogenen Koordinaten eingeführt: Die Translation (Verschiebung) lässt sich nicht wie die linearen Transformationen in einer 3x3 Matrix, sondern nur in einer 3x4 Matrix beschreiben. Durch die Erweiterung des Koordinatensystems um eine weitere Dimension, können nun die Transformationen einheitlich in 4x4 Matrizen beschrieben werden.

Ein Punkt $V(x, y, z)$ wird im homogenen System als $V(x \cdot w, y \cdot w, z \cdot w, w)$, $w \neq 0$ dargestellt, wobei w ein beliebiger Skalierungsfaktor ist, der aber standardmäßig 1 ist. Die Darstellung des Punktes V im homogenen System

1 In der Computergraphik werden die Koordinatenachsen x_1 , x_2 , x_3 als x , y , und z bezeichnet. Dabei entspricht x der x_1 , y der x_2 und z der x_3 Achse.

2 Die Kamera wird als B wie Betrachter bezeichnet.

wäre dann: $V_h(x; y; z; 1)$

Eine interessante Besonderheit des homogenen Koordinatensystems ist, dass es unendlich viele Möglichkeiten gibt, denselben kartesischen Punkt im homogenen Raum zu beschreiben:

Die kartesischen Koordinaten (2,3,4) entsprechen zum Beispiel im homogenen System sowohl (2,3,4,1) als auch (4,6,8,2).³

2.3.2 Affine Transformationen

Eine affine Transformation besteht aus einer beliebigen Kombination linearer Transformationen, gefolgt von einer Verschiebung. Lineare Transformationen sind Rotation, Skalierung und Scherung⁴. Bei einer linearen Transformation wird der zu transformierende Punkt oder jeder Punkt eines zu transformierenden Objektes mit derselben Transformationsmatrix multipliziert. Jede Kombination linearer Transformationen ist wiederum eine lineare Transformation. Lineare Transformationen geschehen immer bezüglich des Ursprungs und können in 3x3 Matrizen berechnet werden⁵. Man kann mehrere nacheinander abfolgende Transformationsschritte zu einer neuen Transformationsmatrix mittels Matrixmultiplikation⁶ zusammenfassen.

2.3.2.1 Die Rotation

Die Rotation eines beliebigen Punktes P um ϕ um eine Koordinatenachse funktioniert, indem man die Koordinaten von P, mit der zur Koordinatenachse gehörenden Rotationsmatrix, in die der Rotationswinkel ϕ eingesetzt wird, multipliziert. Für jede Rotation eines Punktes um eine der drei Koordinatenachsen gibt es eine dazugehörige Rotationsmatrix:⁷

X-Achse	Y-Achse	Z-Achse
$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_y = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_z = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

³ Vgl. [7] S. 17.

⁴ Da Skalierung und Scherung für das Verständnis des Raytracingvorgangs nicht benötigt werden, werde ich sie in dieser Arbeit aus Platzgründen nicht behandeln.

⁵ Die linearen Transformationen werden hier in 4x4 Matrizen behandelt, da in der 3D-Computergraphik ausschließlich homogene Koordinaten verwendet werden.

⁶ Siehe Kapitel 2.3.4.

⁷ Vgl. [7] S.18f.

2.3.2.2 Die Translation

Die Translation verschiebt einen Punkt um die Werte T_x, T_y, T_z in X-, Y-, und Z-Richtung. Soll ein Objekt verschoben werden, so muss jeder Punkt, durch den das Objekt definiert ist, mittels der gleichen Matrix verschoben werden. Durch die Verwendung der homogenen Koordinaten kann die Translation nun als eine Matrixmultiplikation mit einem Vektor berechnet werden. Ohne homogene Koordinaten wäre die Translationsmatrix eine 3x4 Matrix, mit der weder die Multiplikation mit einem Vektor mit drei Einträgen noch mit einer 3x3 Matrix möglich wäre. Zur Translation verwendet man daher folgende Matrix:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 8$$

2.3.3 Produktbildung Vektor-Matrix

In der Computergraphik kommen Matrizen zum Einsatz, die dabei mit Vektoren verrechnet werden. Sofern die Spaltenanzahl der Matrix und die Zeilenanzahl des Vektors gleich sind, gilt, dass jede Zeile der Matrix mit dem Vektor skalar multipliziert wird und so den Eintrag des Ergebnisvektors ergibt. Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{pmatrix} \quad 9$$

2.3.4 Matrixmultiplikation

Zwei Matrizen A und B, die man miteinander multipliziert, ergeben eine neue Matrix C. Sofern die Spaltenanzahl der linken Matrix A und die Zeilenanzahl der rechten Matrix B gleich sind, wird für die Einträge der ersten Spalte der Matrix C jede Zeile der Matrix A mit der ersten Spalte von Matrix B skalar multipliziert. Für die zweite Spalte der Ergebnismatrix C wird dann jede Zeile der Matrix A mit der zweiten Spalte von Matrix B skalar multipliziert. Jede weitere Spalte der Ergebnismatrix wird synchron berechnet. Die Ergebnismatrix C besitzt die gleiche Zeilenanzahl wie Matrix A und die gleiche Spaltenanzahl wie Matrix B. Ein einfaches Rechenbeispiel zur Veranschaulichung:

8 Vgl. [7] S. 17f.

9 Vgl. [1] Enthalten auf der CD im Anhang: [matrixvektorprodukt.html](#).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1) & (1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0) \\ (4 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 1) & (4 \cdot (-3) + 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 40 & -22 \end{pmatrix}$$

Die Matrixmultiplikation ist im allgemeinen nicht kommutativ:

$$B \cdot A \neq A \cdot B \quad ^{10}$$

Beispiel:

Der rote Würfel stellt jeweils das Objekt vor der Transformation, der grüne danach dar. Die beiden nacheinander ausgeführten Transformationen wurden jeweils zu einer neuen Transformationsmatrix verrechnet, mit der die Transformation vollzogen wurde.

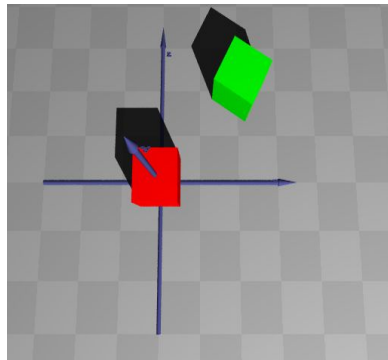


Abbildung 3

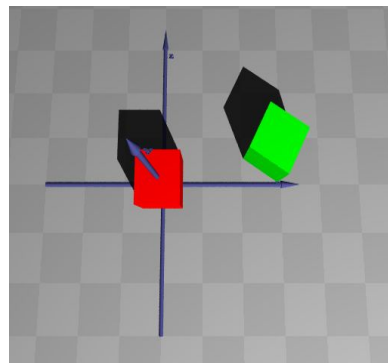


Abbildung 4

Rotation um Y mit $\phi=30^\circ$ gefolgt von einer Verschiebung um (2; 0; 2) (Abbildung 3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & 0 & \sin 30^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & 0 & \sin 30^\circ & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verschiebung um (2; 0; 2) gefolgt von einer Rotation um Y mit $\phi=30^\circ$ (Abbildung 4):

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & 0 & \sin 30^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & 0 & \sin 30^\circ & 2 \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ & -2 \cdot \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹⁰ Vgl. [2] Enthalten auf der CD im Anhang: Matrizenmultiplikation.htm.

2.4 Der Raytracingvorgang

Der Vorgang des Raytracing lässt sich in mehrere Schritte unterteilen. Ich werde ihn der Verständlichkeit halber nur mit den notwendigsten Fähigkeiten ausgestattet erläutern.

2.4.1 Koordinatentransformation

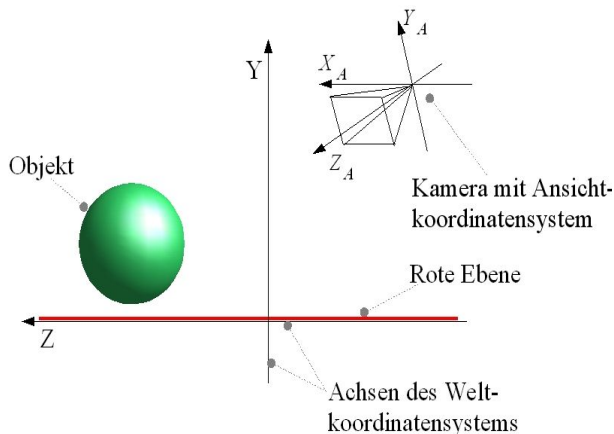


Abbildung 5

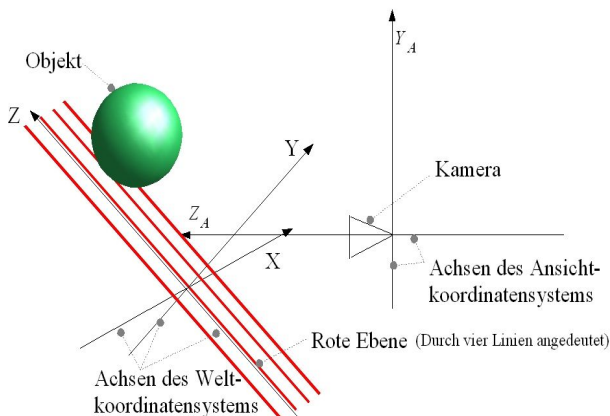


Abbildung 6: Blick auf die Szene aus dem Ansichtskoordinatensystem

Da die Szene wegen des eingeschränkten Vorstellungsvermögens des Menschen bezüglich des Weltkoordinatensystems (siehe Abbildung 5) beschrieben wird, findet sich die virtuelle Kamera, die in die gewünschte Position gebracht wurde, um einen bestimmten Teil der Szenerie abzubilden, fern vom Ursprung. Dadurch wird aber die Berechnung des Bildes sehr kompliziert. Für die Berechnung des Bildes ist es vorteilhaft, wenn sich die Kamera in einer günstigen Position am Ursprung befinden würde. Die Projektionsebene und die Betrachterstrahlen können in diesem Fall sehr leicht aufgestellt werden. Da aber nach dem Verschieben der Kamera diese

einen anderen Szenenausschnitt abbilden würde, müssen alle Objekte auf die gleiche Weise wie die Kamera transformiert werden. Man spricht dabei von einer Koordinatentransformation des Weltkoordinatensystems in das Ansichtskoordinatensystem (Vgl. Abbildung 6). Nach der Transformation liegt die Betrachterposition im Ursprung und das Blickziel befindet sich auf dem positiven Teil der Z-Achse.¹¹ Die Transformationsmatrix für diesen Vorgang wird

¹¹ Vgl. [4] S. 56 - 59.

folgendermaßen erstellt:

Man berechnet zunächst die Transformationen, die notwendig sind, um die Kamera aus ihrer derzeitigen Position in die beabsichtigte Position am Ursprung zu bringen. Mit der auf diese Art gewonnenen Informationen wird die Transformationsmatrix erstellt, mit der dann alle Objekte transformiert werden. Über die Kamera ist bekannt:¹²

Ort $B(x_b; y_b; z_b; 1)$ ¹³, Blickrichtung auf Punkt $Z(x_z; y_z; z_z; 1)$ und Öffnungswinkel α . Sie muss zuerst an den Ursprung verschoben werden und dann so um die X-, Y-, (und Z-Achse¹⁴) gedreht werden, dass das Blickziel auf dem positiven Teil der Z Achse liegt. Man beginnt mit einer Translation des Zielpunktes Z um $(-x_b; -y_b; -z_b)$. Mit dem dabei neu entstandenen Vektor \vec{Z}' können die Winkel¹⁵ der Rotationen um die X- und die Y- Achse berechnet werden. Es werden im folgenden alle Transformationen zu der Koordinatentransformationsmatrix verrechnet. Die Koordinatentransformation beginnt immer mit einer Translation T um $(-x_b; -y_b; -z_b)$. Für die Rotationswinkel der nachfolgenden Rotationen um die X- und Y-Achse ist jedoch eine Fallunterscheidung nötig.

Der Rotationswinkel ϕ_x um die X-Achse sei: $\left(\frac{y_{z'}^2}{\sqrt{y_{z'}^2 \cdot y_{z'}^2}} \right) \cdot 90^\circ$

Der Rotationswinkel ϕ_y um die Y-Achse sei: $\left(\frac{x_{z'}^2}{\sqrt{x_{z'}^2 \cdot z_{z'}^2}} \right) \cdot 90^\circ$

Fallunterscheidung:

- $z_{z'} > 0$:
 - $x_{z'} > 0$: Rotation um die Y-Achse um $-\phi_y$
 - $y_{z'} > 0$: ϕ_x ¹⁶ \vee $y_{z'} < 0$: $-\phi_x$ \vee $y_{z'} = 0$: keine Rotation

¹² Es gilt: Kameraort und Blickziel sind nicht identisch : $\vec{B} \neq \vec{Z}$.

¹³ Aufgrund der auszuführenden Transformationen werden homogene Koordinaten benötigt.

¹⁴ Um die Z-Achse muss bei einer geeigneten Kamera rotiert werden. Hierfür muss die Rotation um die Z-Achse in der Kameradefinition festgelegt worden sein, da sonst die auf dem Bildschirm horizontalen Kanten des Sichtfensters der Kamera als parallel zur X-Z-Ebene definiert sind.

¹⁵ Herleitung der Formel für die Winkelberechnung siehe Anhang S. 23.

¹⁶ Da sich die Fallunterscheidung sonst auf mehrere Seiten ausdehnen würde, wurde hier und in den folgenden Zeilen der Hinweis weggelassen, dass es sich um den Rotationswinkel um

- $x_{z'} < 0$: Rotation um die Y-Achse um ϕ_y
 - $y_{z'} > 0$: ϕ_x \vee $y_{z'} < 0$: $-\phi_x$ \vee $y_{z'} = 0$: keine Rotation
- $x_{z'} = 0$: keine Rotation um die Y-Achse
 - $y_{z'} > 0$: ϕ_x \vee $y_{z'} < 0$: $-\phi_x$ \vee $y_{z'} = 0$: keine Rotation
- $z_{z'} < 0$:
 - $x_{z'} > 0$: Rotation um die Y-Achse um $\phi_y + 180^\circ$
 - $y_{z'} > 0$: ϕ_x \vee $y_{z'} < 0$: $-\phi_x$ \vee $y_{z'} = 0$: keine Rotation
 - $x_{z'} < 0$: Rotation um die Y-Achse um $-\phi_y + 180^\circ$
 - $y_{z'} > 0$: ϕ_x \vee $y_{z'} < 0$: $-\phi_x$ \vee $y_{z'} = 0$: keine Rotation
 - $x_{z'} = 0$: Rotation um die Y-Achse um 180°
 - $y_{z'} > 0$: ϕ_x \vee $y_{z'} < 0$: $-\phi_x$ \vee $y_{z'} = 0$: keine Rotation
- $z_{z'} = 0$:
 - $x_{z'} > 0$: Rotation um die Y-Achse um -90°
 - $y_{z'} > 0$: ϕ_x \vee $y_{z'} < 0$: $-\phi_x$ \vee $y_{z'} = 0$: keine Rotation
 - $x_{z'} < 0$: Rotation um die Y-Achse um 90°
 - $y_{z'} > 0$: ϕ_x \vee $y_{z'} < 0$: $-\phi_x$ \vee $y_{z'} = 0$: keine Rotation
 - $x_{z'} = 0$: keine Rotation um die Y-Achse
 - $y_{z'} > 0$: Rotation um die X-Achse um 90°
 - $y_{z'} < 0$: Rotation um die X-Achse um -90°
 - $y_{z'} = 0$: Fall tritt nicht ein, da Kameraposition und Blickziel nicht identisch sein dürfen.¹⁷

Für den Fall, dass in der Kameradefinition eine Rotation der Kamera um ϕ_z um die Z-Achse festgelegt wurde, kommt eine Rotationsmatrix um die Z-Achse hinzu, wobei der Rotationswinkel immer $-\phi_z$ beträgt.

Mit der entstandenen Transformationsmatrix werden alle Objekte und Lichtquellen, mit Ausnahme der Kamera transformiert und bekommen so neue Koordinaten zugewiesen. Die Kamera befindet sich nun am Ursprung. Ihre Blickrichtung ist entlang der Z-Achse mit Öffnungswinkel α .

die X-Achse handelt. Es ist aber dennoch an dem Indizes x von ϕ_x erkennbar.

17 Manche Grafikprogramme übergehen dieses Problem, indem sie in diesem Fall nur die Translation und die mögliche Rotation um die Z-Achse durchführen und anschließend als Kameraposition den Ursprung verwenden und als Blickrichtung den Richtungsvektor der Z-Achse festsetzen.

2.4.2 Aufstellen der Projektionsebene

Da zuvor eine Koordinatentransformation stattgefunden hat, hat sich das Aufstellen der Projektionsebene um ein Vielfaches vereinfacht. Wir haben die Kameraposition $B(0;0;0)$ ¹⁸, den Öffnungswinkel α und die Blickrichtung,

$$\vec{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Projektionsebene in Parameterform¹⁹ aufzustellen, benötigt man einen Aufpunkt sowie zwei Spannvektoren. Der Aufpunkt entsteht, indem man den zuvor normierten Vektor \vec{Z} an \vec{B} hängt. Als Spannvektoren werden die Richtungsvektoren der X- und der Y-Achse gebraucht. Die Ebenengleichung der Projektionsebene lautet folglich:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 20$$

Es wird jedoch nicht die gesamte hier beschriebene Ebene benötigt, sondern nur ein Ausschnitt, das Sichtfenster. Da die Bildschirme heutzutage standardmäßig 4:3 als Verhältnis Bildschirmbreite zu Bildschirmhöhe haben, ist das Verhältnis Höhe zu Breite des Sichtfensters auch 4:3.

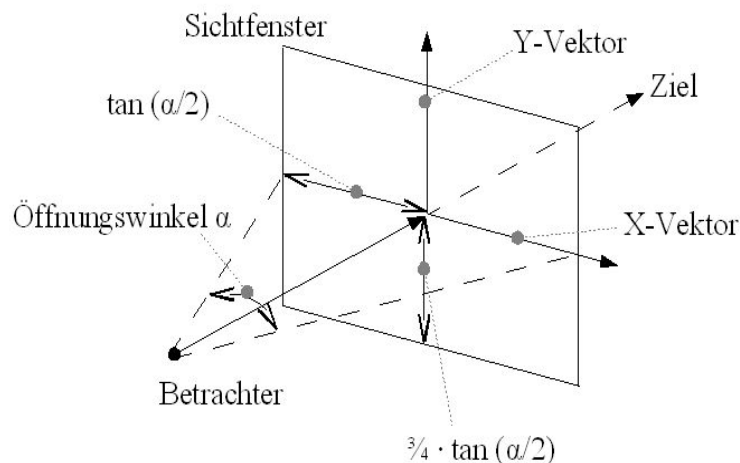


Abbildung 7: Größenverhältnisse des Sichtfensters im Bezug auf α . 21

¹⁸ Es werden nun wieder kartesische Koordinaten verwendet.

¹⁹ Es wäre zwar einfacher die Ebene in Normalenform aufzustellen, jedoch ist für nachfolgende Berechnungen die Parameterform notwendig.

²⁰ Vgl. [6] S. 43ff.

²¹ Abbildung 7 in Anlehnung an [4] S.59 Abb. 2.55

Zunächst berechnet man den Right-Vektor \vec{r} , der mit $\tan(\alpha/2)$ skalierte X-Vektor und den Up-Vektor \vec{u} , der mit $(3/4) \cdot \tan(\alpha/2)$ skalierte Y-Vektor des Koordinatensystems:

$$\vec{u} = \vec{y} \cdot \frac{3}{4} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \vec{r} = \vec{x} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Das Sichtfenster ist nun durch folgende vier Punkte begrenzt:

$$S_1 = \vec{u} - \vec{r}, \quad S_2 = \vec{u} + \vec{r},$$

$$S_3 = -\vec{u} - \vec{r}, \quad S_4 = -\vec{u} + \vec{r}$$

Für die Abmessungen eines einzelnen Bildpunktes, auch Pixel genannt, ergibt sich unter der Voraussetzung, dass $\text{Pixelbreite} = \text{Pixelhöhe}$ und

$$\frac{X - \text{Auflösung}}{Y - \text{Auflösung}} = \frac{\text{Bildschirmbreite}}{\text{Bildschirmhöhe}} : \quad \text{Pixelbreite} = \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{X - \text{Auflösung}}$$

Die Vorgehensweise der Berechnung der Pixelmittelpunkte, lässt sich mit Abbildung 8 veranschaulichen. \vec{P}_H besitzt die Höhe eines Pixels, \vec{P}_B die Breite.²²

$$\vec{P}_H = \begin{pmatrix} \frac{x_u}{(Y - \text{Auflösung} \cdot 0,5)} \\ \frac{y_u}{(Y - \text{Auflösung} \cdot 0,5)} \\ \frac{z_u}{(Y - \text{Auflösung} \cdot 0,5)} \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_B = \begin{pmatrix} \frac{x_r}{(X - \text{Auflösung} \cdot 0,5)} \\ \frac{y_r}{(X - \text{Auflösung} \cdot 0,5)} \\ \frac{z_r}{(X - \text{Auflösung} \cdot 0,5)} \end{pmatrix}$$

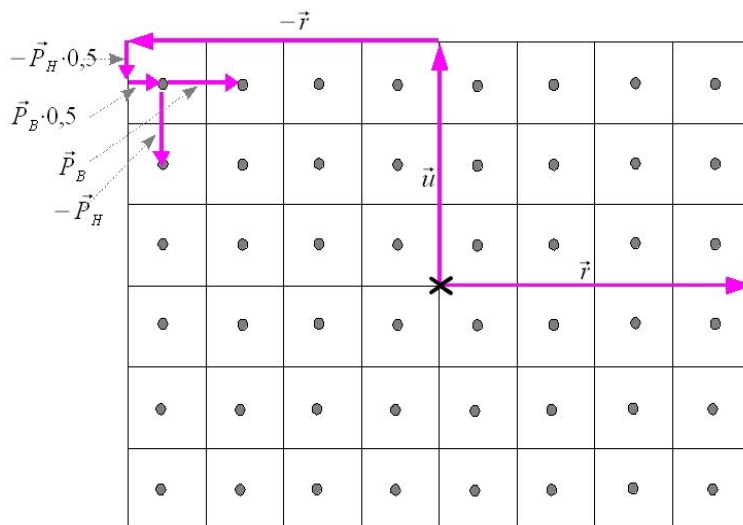


Abbildung 8: Schematische Darstellung des Sichtfensters mit den einzelnen Pixeln. Hier in einer Auflösung von 6 x 8.

²² Vgl. [3] Kapitel 3.3.1.1ff ; [4] S. 51f.

Der erste Pixelmittelpunkt²³ P_{1-1} berechnet sich wie auf der Abbildung 8 dargestellt:

$$P_1 = (\vec{u} - \vec{r}) - \vec{P}_H \cdot 0,5 + \vec{P}_B \cdot 0,5$$

Für den n-ten Pixelmittelpunkt P_{n-m} in der m-ten Zeile wird an P_{1-1} der Vektor \vec{P}_B $n-1$ mal und der Vektor $-\vec{P}_B$ $m-1$ mal addiert. Wobei:

$$1 < n \leq X - \text{Auflösung} \quad , \quad 1 < m \leq Y - \text{Auflösung} \quad , \quad n, m \in \mathbb{N} \quad .$$

2.4.3 Schnittberechnungen

Durch den Ursprung und durch jeden Pixelmittelpunkt

$$P_{n-m} (x_{P_{n-m}} ; y_{P_{n-m}} ; z_{P_{n-m}})$$

wird nun eine Gerade, der sogenannte Betrachterstrahl aufgestellt. Die allgemeine Gleichung lautet:

$$X_{P_{n-m}}^{\rightarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} x_{P_{n-m}} \\ y_{P_{n-m}} \\ z_{P_{n-m}} \end{pmatrix}$$

Jede Gerade $X_{P_{n-m}}^{\rightarrow}$ wird mit allen Objekten, außer den Lichtquellen und der Kamera geschnitten, wobei drei Fälle auftreten können.

Fall 1: Es ist kein Schnittpunkt mit einem Objekt vorhanden:

Pixelfarbe ist die Hintergrundfarbe²⁴, berechne den nächsten Pixel²⁵.

Fall 2: Es ist ein Schnittpunkt vorhanden:

Fall 2.1: Der Schnittpunkt befindet sich vor der Projektionsebene²⁶:

Berechnung der Farbe in dem Schnittpunkt; Berechnung des nächsten Pixels

²³ Der erste Pixel befindet sich immer in der ersten Zeile von oben, ganz links.

²⁴ Die Farbigkeit des zuvor berechneten Pixels wird sinnvollerweise abgespeichert.

²⁵ Sofern noch weitere Pixel übrig sind.

²⁶ Der Z-Wert des gefundenen Schnittpunktes gibt über die Lage des Schnittpunktes bezüglich der Projektionsebene Auskunft: Die Bedingung $Z \leq 1$ muss erfüllt sein, wobei sich bei $Z < 1$ der Schnittpunkt vor der Projektionsebene und bei $Z = 1$ auf der Projektionsebene befindet. Alle Schnittpunkte mit $Z > 1$ sind nicht sichtbar, da sie sich hinter der Projektionsebene befinden. Sie sind daher uninteressant.

Fall 2.2: Der Schnittpunkt befindet sich hinter der Projektionsebene:

Pixelfarbe ist die Hintergrundfarbe, berechne den nächsten Pixel.

Fall 3: Es sind mehrere Schnittpunkte vorhanden:

Fall 3.1: Es befinden sich Schnittpunkte vor der Projektionsebene:

Wähle Schnittpunkt der am nächsten zu der Projektionsebene liegt, berechne die Farbe in dem Schnittpunkt, berechne den nächsten Pixel.

Fall 3.2: Es befindet sich kein Schnittpunkt vor der Projektionsebene:

Pixelfarbe ist die Hintergrundfarbe, berechne den nächsten Pixel²⁷.

2.4.4 Farbberechnung durch lokale Beleuchtungsmodelle

An dem Schnittpunkt des Betrachterstrahls mit dem getroffenen Objekt sind die Eigenschaften des Objekts und die der Beleuchtungskomponenten für die Farbgebung verantwortlich. Die Farbintensität in einem Punkt setzt sich aus der ambienten Beleuchtung, der diffusen Beleuchtung und der spekularen Beleuchtung zusammen.

2.4.4.1 Sichtbarkeitsuntersuchungen

Da von Objekten verdeckte Lichtquellen nicht zur Beleuchtung eines Punktes beitragen, beginnt die Farbberechnung mit Sichtbarkeitsuntersuchungen, um die Lichtquellen, die von dem Schnittpunkt S aus nicht sichtbar sind, von der Liste der von dem Punkt aus sichtbaren Lichtquellen zu entfernen. Folgende Untersuchung findet daher für jede Lichtquelle statt:

In einem Schnittpunkt wird zunächst aus der Normalen²⁸ und dem Schnittpunkt eine Ebene in Hesse-Normalform aufgestellt. Es wird nun der Abstand der Lichtquelle zu der Ebene berechnet.

Fall 1: $Abstand \leq 0$:

Objekt beschattet sich selbst, da Lichtquelle im negativen Halbraum liegt; Streiche Lichtquelle von der Liste der sichtbaren Lichtquellen für S .

Fall 2: $Abstand > 0$:

Erstelle aus dem Schnittpunkt S eine Gerade zu der Lichtquelle. Schneide diese Gerade, auch Schattenstrahl genannt, mit allen anderen Objekten (außer

²⁷ Vgl. [5] S.578ff ; [6] S.57f.

²⁸ Die Normale sei normiert.

mit den Lichtquellen und der Kamera)

Fall 2.1: Schnittpunkt(e) mit anderen Objekten wurden gefunden:

Falls ein Schnittpunkt zwischen S und der Lichtquelle liegt, wird die Lichtquelle von der Liste der sichtbaren Lichtquellen für S gelöscht.

Fall 2.2: Schattenstrahl wird nicht oder nicht zwischen S und der Lichtquelle von einem Objekt geschnitten:

Beginne mit der Sichtbarkeitsuntersuchung der nächsten Lichtquelle.

Nur mit den Lichtquellen, die auf der Liste verblieben sind, wird die Farbe des Schnittpunktes berechnet.

2.4.4.2 Ambiente Beleuchtung (Umgebungslicht)

Das ambiente Licht entsteht in der Natur durch die Reflektion von Lichtstrahlen in der Atmosphäre an kleinen Teilchen. Dadurch entstehen Lichtstreuungen, die alle Objekte relativ gleichmäßig beleuchten. Die ambiente Beleuchtung ist von der gegenseitigen Lage der Lichtquellen, Objekten und Kamera unabhängig. Eine rote Kugel würde beispielsweise als rote Scheibe erscheinen. Daher entsteht allein durch eine ambiente Beleuchtung keine räumliche Tiefe.

Die Intensität der ambienten Beleuchtung I_A in einem Punkt ist abhängig von der Intensität des ambienten Lichtes I_a und einem Faktor k_a , der die Wiedergabestärke des ambienten Lichtes der Oberfläche eines Objekts beschreibt:

$$I_A = I_a \cdot k_a \quad \text{wobei} \quad 0 \leq k_a \leq 1. \quad ^{29}$$

2.4.4.3 Diffuse Beleuchtung

Raue Oberflächen haben die Eigenschaft, dass sie unabhängig vom Einfallswinkel des Lichts dieses in alle Richtungen relativ gleichmäßig reflektieren, da die Lichtstrahlen unterschiedlich tief in die raue Oberfläche eintreten, bevor sie reflektiert werden (Abbildung 9)³⁰.

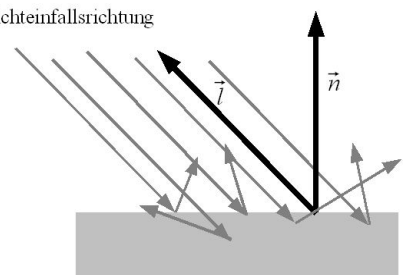


Abbildung 9

Die Intensität I_D diffuser Beleuchtung lässt sich beschreiben, in dem man bei dem von der Lichtquelle ausgehenden Licht,

²⁹ Vgl. [4] S. 71.

³⁰ Abbildung 9 in Anlehnung an [4] S.72 Abb. 2.72

die Leuchtdichte³¹ I_j betrachtet. Je flacher der Winkel δ mit dem das Licht auf eine Oberfläche auftrifft ist, desto größer ist die Fläche auf die sich die Lichtleistung verteilt und die Intensität der Beleuchtung verringert sich.

Wenn das Licht, das auf ein Flächenstück A , welches senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht, auf das Flächenstück A' verteilt wird, so lässt sich über die Leuchtdichte I_D auf A' aussagen (Abbildung 10)³²:

$$I_D = \frac{A}{A'} \cdot I_j$$

Der Einfallswinkel δ gibt das Verhältnis von A und A' an:

$$A = A' \cdot \cos \delta, \quad (0^\circ < \delta < 90^\circ)$$

Beide Gleichungen zusammengefasst besagen: $I_D = \frac{A}{A'} \cdot I_j = I_j \cdot \cos \delta$

Da der Lichteinfallsvektor \vec{l} und der Normalenvektor \vec{n} normiert sind, gilt für $\cos \delta$: $\cos \delta = \vec{l} \cdot \vec{n}$

Die Beleuchtungsintensität I_D der diffusen Beleuchtung, die auf einem Punkt der Oberfläche verursacht wird, ist zudem von einem Faktor k_d , mit $(0 \leq k_d \leq 1)$, abhängig, der angibt, wie stark die Oberfläche diffus reflektiert. Es lässt sich zusammenfassend sagen:

$$I_D = I_j \cdot k_d \cdot (\vec{l} \cdot \vec{n}) \quad .^{33}$$

2.4.4.4 Spekulare Beleuchtung

Die spekulare Beleuchtung erzeugt spekulare Highlights, die auch Glanzpunkte genannt werden. Sie sind ein Phänomen, das zum Beispiel auf Billardkugeln sehr gut sichtbar ist. Da diese unter anderem von der Betrachterposition abhängig sind, werden sie von keinem der beiden anderen Beleuchtungsmodelle erfasst. Daher kommt nun das Phong'sche Beleuchtungsmodell³⁴ zum

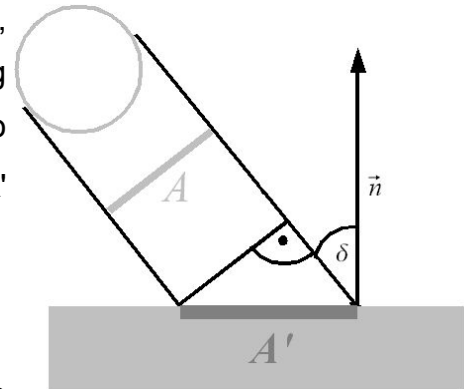


Abbildung 10

³¹ Leuchtdichte ist Lichtleistung einer Lichtquelle pro Flächeneinheit.

³² Abbildung 10 in Anlehnung an [4] S.72 Abb. 2.71

³³ Vgl. [4] S. 71f ; [6] S.68ff.

³⁴ Das Phong'sche Beleuchtungsmodell basiert auf dem Lambertschen Beleuchtungsmodell, das nur ambiente und diffuse Beleuchtung berücksichtigt. Phong Bui-Tuong erweiterte es um die spekulare Beleuchtung.

Einsatz.

In einem Punkt P der Oberfläche eines Körpers wird aus dem Vektor \vec{l} , der zur Lichtquelle zeigt, und dem Vektor \vec{b} der zum Betrachter zeigt, der Highlightvektor \vec{h} , der den Winkel zwischen \vec{l} und \vec{b} halbiert, berechnet (Abbildung 11)³⁵:

$$\vec{h} = \frac{\vec{b} + \vec{l}}{|\vec{b} + \vec{l}|}$$

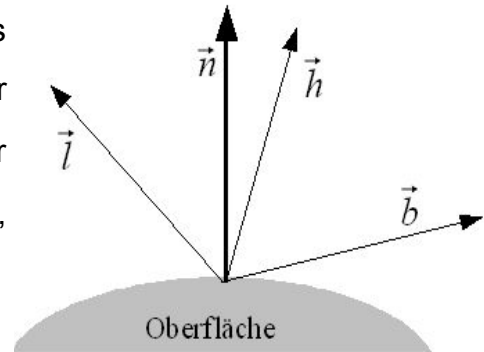


Abbildung 11

Je kleiner der Winkel ($\vec{h} \circ \vec{n}$) zwischen der Normalen \vec{n} und \vec{h} ist, desto stärker wird das Licht direkt von der Lichtquelle zum Betrachter reflektiert. Die Materialkonstante k_p (wobei $0 \leq k_p \leq 1$) gibt an, wie stark der Glanzpunkt auf der Oberfläche hervortritt. Ein Exponent m beeinflusst zu dem noch die Schärfe und Größe der Glanzpunkte, die abhängig von der Rauigkeit der Oberfläche variiert³⁶:

$$I_s = I_j \cdot k_p \cdot (\vec{n} \circ \vec{h})^m \quad 37$$

2.4.4.5 Zusammenfassung der lokalen Beleuchtungskomponenten:

Zusammenfassen lässt sich die Farbintensität I eines Punktes durch diese Gleichung, die jeweils für den Rot-, Grün-, und Blauwert der Farbe berechnet werden muss:

$$I = k_a \cdot I_a \cdot O + k_d \cdot \sum_{j=1}^n I_j \cdot (\vec{l} \circ \vec{n}) \cdot O + k_p \cdot \sum_{j=1}^n I_j \cdot (\vec{l} \circ \vec{n})^m$$

Die Intensität des jeweiligen Farbwertes ist die Summe aus der ambienten, der diffusen und der spekularen Beleuchtung. Der Faktor O ist die definierte Oberflächenfarbe des Objekts. Die diffuse Beleuchtung setzt sich aus der Summe der einzelnen Intensitäten I_1, I_2, \dots, I_n der Lichtquellen (n = Anzahl) zusammen, die von dem jeweiligem Punkt aus sichtbar sind. Gleiches gilt für die spekulare Beleuchtung. Auf den folgenden vier Bildern ist der Einfluss der

³⁵ Abbildung 11 in Anlehnung an [4] S.73 Abb. 2.74

³⁶ Je größer m ist desto stärker und schneller fällt die Helligkeit bei einem größerem Winkel zwischen \vec{h} und \vec{b} . Die Folge sind kleinere und schärfer abgegrenzte Glanzpunkte.

³⁷ Vgl. [4] S. 72ff ; [5] S.546ff.

Beleuchtungskomponenten verdeutlicht.³⁸

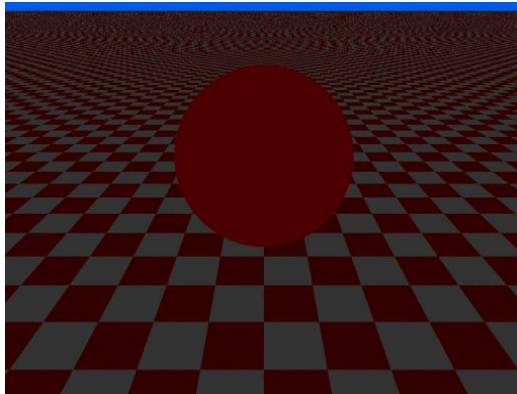


Abbildung 13: Nur ambiente Beleuchtung

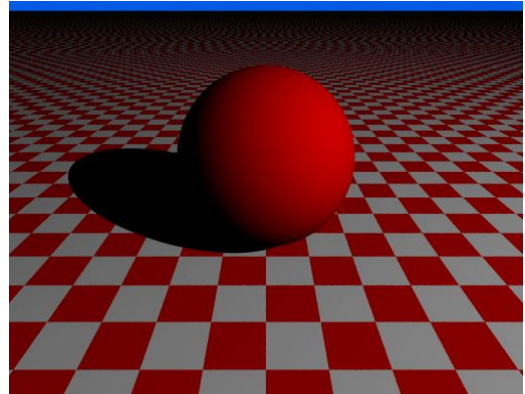


Abbildung 12: Nur diffuse Beleuchtung

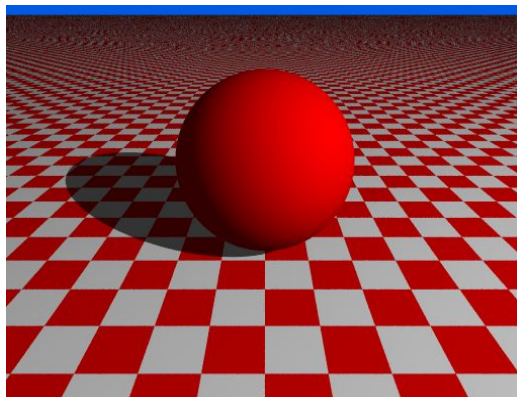


Abbildung 14: Diffuse und Ambiente Beleuchtung

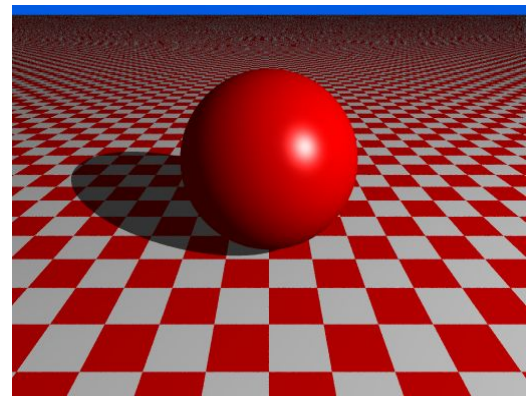


Abbildung 15: Ambiente, diffuse und spektrale Beleuchtung

2.4.5 Erweiterungen des Raytracingvorgangs

Da ich im Rahmen meiner Facharbeit den Raytracingvorgang auf seine grundlegendsten Funktionen einschränken musste, möchte ich nun in diesem Kapitel zwei weitere Funktionen zumindest kurz vorstellen, die in modernen Raytracern Verwendung finden.

2.4.5.1 Reflektion

Spiegelnde Oberflächen können ebenfalls durch Raytracing simuliert werden. Ist ein vom Betrachterstrahl getroffenes Objekt verspiegelt, so wird je nach Stärke der Reflektionseigenschaft die Farbgebung verhältnismäßig aufgeteilt. Der eine Teil kommt aus der ambienten, diffusen und aus der spekularen Beleuchtung, der andere Teil aus dem reflektiertem Strahl. Der reflektierte

³⁸ Vgl. [4] S. 74f.

Strahl liegt mit der Normalen in dem Schnittpunkt und dem Betrachterstrahl in einer Ebene. Desweiteren sind die Winkel zwischen reflektiertem Lichtstrahl und Normale und zwischen Normale und Betrachterstrahl gleich groß. Der reflektierte Lichtstrahl wird nun mit jedem Objekt der Szene geschnitten. Sollte es keinen Schnittpunkt geben, so ist die Hintergrundfarbe seine Farbe. Wenn es einen oder mehrere Schnittpunkte gibt, so wird der ausgewählt, der am nächsten liegt. In dem neuen Schnittpunkt muss nun die Farbigkeit auf übliche Weise berechnet werden, wobei auch dort eine Reflektion auftreten kann.³⁹

2.4.5.2 Transparenz und Brechung

Um einen Körper teiltransparent aussehen zu lassen, wird ein Transparenzwert t mit $(0 \leq t \leq 1)$ eingefügt, mit dem die durch die lokalen Beleuchtungsmodelle zugewiesene Farbe skaliert wird. Anschließend wird der Schnittpunkt des Betrachterstrahls mit dem Objekt gesucht, das nach dem ersten das nächste Objekt zu der Projektionsebene ist. Dessen Farbigkeit wird anschließend berechnet mit $(1-t)$ multipliziert und zur lokalen Farbigkeit des ersten Schnittpunktes addiert.

Allerdings genügt bei der realistischen Darstellung von beispielsweise einer Glaskugel nicht allein das Einfügen eines Transparenzwertes, da das Brechungsgesetz nicht berücksichtigt wurde. In verschiedenen Medien kann sich das Licht bekanntlich nur mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegen, abhängig vom jeweiligen Material. Wenn nun ein Lichtstrahl von einem Medium in ein anderes wechselt, verändert der Lichtstrahl an der Grenzfläche neben seiner Ausbreitungsgeschwindigkeit seine Richtung. Dieses Phänomen wird als Brechung oder Refraktion bezeichnet. Ein teiltransparentes Objekt wird somit nur richtig dargestellt werden, wenn es das Licht auch bricht. Für transparente Objekte wird daher ein Brechungsindex i_{or} festgelegt. Mittels dieses Wertes wird die Richtung des Betrachterstrahls beim Ein- und Austritt aus dem Objekt angepasst.

Sollte ein Objekt Reflektionseigenschaften haben und transparent sein, so teilt sich der Betrachterstrahl. Der eine Teil wird reflektiert, der andere nicht. Aus den gewonnen Farbinformationen beider Strahlen, wird dann die Farbigkeit berechnet.⁴⁰

³⁹ Vgl. [4] S. 68f.

⁴⁰ Vgl. [4] S. 68f.

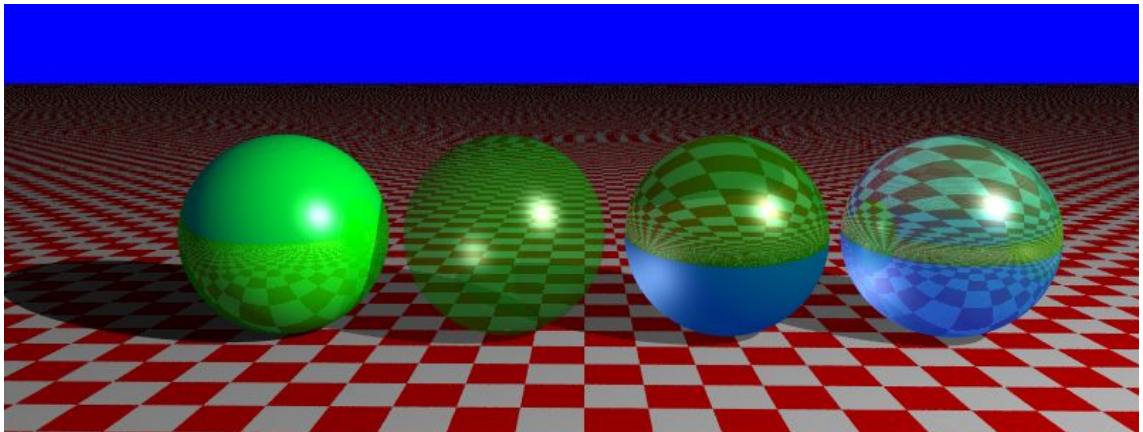


Abbildung 16: Von links nach rechts: Kugel mit Reflektionswert 0,1 ; Kugel mit $t = 0,7$ (Transparenzwert) ; Kugel mit $t = 0,7$ und $ior = 1.5$; Kugel mit $t = 0,7$, $ior = 1.5$ und Reflektionswert 0,1.

3 Schlusswort

Bei der Berechnung fotorealistischer computergrafischer Bilder wird von den Computern eine enorme Rechenleistung gefordert. Selbst Computer, die heutzutage als veraltet gelten, sind trotzdem zu extremen Rechenleistungen fähig. Durch die stetig steigende Rechengeschwindigkeit der Computer der heutigen Zeit, verschwinden die Grenzen des Berechenbaren langsam: Die durch Raytracing berechnete Szenen werden immer komplexer und realistischer. Raytracing ist aus unserem Medienzeitalter nicht mehr wegzudenken und wird wohl auch in ferner Zukunft nicht an Bedeutung verlieren.

4 Literaturverzeichnis

Internetseiten:

- [1] uni-kl.de: <http://www.mathematik.uni-kl.de/~mamaeusch/lexikon/matrixvektorprodukt.html> , abgerufen am 24.1.2006.
- [2] wikipedia.org:
<http://de.wikipedia.org/wiki/Matrizenmultiplikation#Matrixmultiplikation> ,
 abgerufen am 03.01.2006.

Programmhilfe:

- [3] povray.org: Povray Reference v.3.6. 2004.

Bücher:

- [4] Filler, A.: Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II im Stoffgebiet Analytische Geometrie. Ohne Verlag, 2004.
- [5] Foley, J. D., und andere: Grundlagen der Computergraphik. Einführung, Konzepte, Methoden. Addison Wesley, 1994.
- [6] Haenselmann, T.: Raytracing. Grundlagen, Implementierung, Praxis. Addison Wesley, 1996.
- [7] Watt, A.: 3D-Computergraphik. Pearson Education Deutschland GmbH, 2002.

5 Anhang

1. Zu 2.4.1 Koordinatentransformation:

Herleitung der Formel zur Berechnung des Rotationswinkels

Nachdem \vec{Z} an den Ursprung verschoben wurde, muss $\vec{Z}'(x_{z'}, y_{z'}, z_{z'})$ nur noch um ϕ_x um die X-Achse und ϕ_y um die Y-Achse gedreht werden, damit er mit der Z-Achse identisch wird.

Zunächst betrachten wir das Problem des gesuchten Positionswinkels um die Y-Achse aus der Aufsicht. Die Y-Achse zeigt auf der Abbildung aus dem Bild heraus.

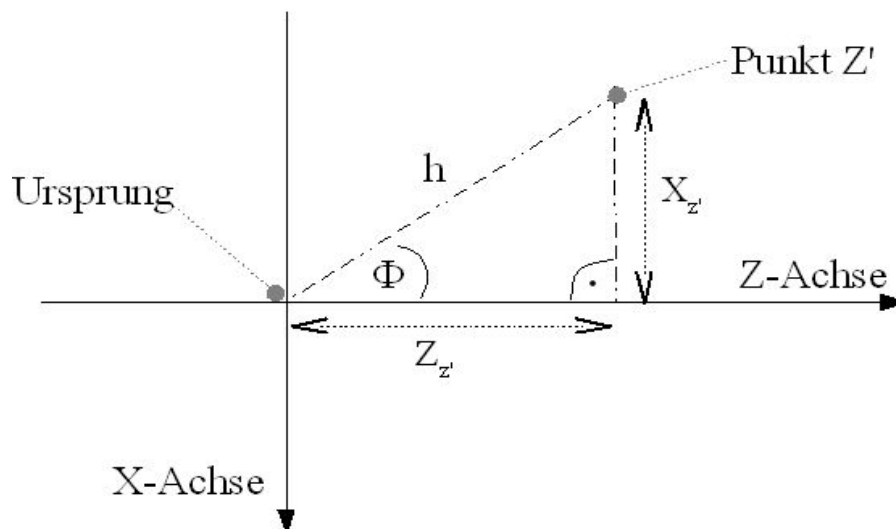


Abbildung 17

Das Problem ist, dass der Punkt Z' um ϕ um die Y-Achse gedreht werden muss. Den Winkel ϕ kann man sehr leicht mit dem Sinus-Satz berechnen, wenn man das ganze Problem in dem rechtwinkligen Dreieck betrachtet, das durch den Ursprung, dem Punkt Z' und dem Punkt $E(0;0;Z_{z'})$ gebildet wird:

$$\frac{\phi}{90} = \frac{x_{z'}^2}{h^2}, \text{ wobei } h = \sqrt{(x_{z'})^2 + (z_{z'})^2}$$

h eingesetzt und nach ϕ aufgelöst, ergibt sich die Formel:

$$\phi = \left(\frac{x_{z'}^2}{\sqrt{x_{z'}^2 + z_{z'}^2}} \right) \cdot 90^\circ$$

Die Berechnung des Rotationswinkels um die X-Achse ergibt sich analog.

2. Inhalt der CD im Anhang

Folgende Quellen sind auf der CD im Anhang abgespeichert:

Datei	Beschreibung	Quellen-Nr.
Fil-Hab2.pdf	Auszug aus einer Habilitation	[4]
Fil-Hab-Farbanhang.pdf	Anhang des Auszuges	[4]
povwin36.exe	Programm: Povray v3.6	[3]
matrixvektorprodukt.html	Gespeicherte Website	[1]
Matrizenmultiplikation.htm	Gespeicherte Website	[2]

Folgende Bilder, die in der Facharbeit Verwendung finden, sind im Verzeichnis Abbildungen/ auf der CD abgelegt:

Abbildung	Bilddatei	Quellcode-Datei
Abbildung 1	Einleitung.bmp	Einleitung.pov
Abbildung 2	01.bmp	01.pov
Abbildung 3	rot 30y+ trans.bmp	rot 30y+ trans.pov
Abbildung 4	trans + rot 30y.bmp	trans + rot 30y.pov
Abbildung 5	grafik8.jpg	grafiken.sxd S.8
Abbildung 6	grafik7.jpg	grafiken.sxd S.7
Abbildung 7	grafik1.jpg	grafiken.sxd S.1
Abbildung 8	grafik3.jpg	grafiken.sxd S.3
Abbildung 9	grafik5.jpg	grafiken.sxd S.5
Abbildung 10	grafik4.jpg	grafiken.sxd S.4
Abbildung 11	grafik6.jpg	grafiken.sxd S.6
Abbildung 12	03-d.bmp	03-d.pov
Abbildung 13	03-a.bmp	03-a.pov
Abbildung 14	03-a+d.bmp	03-a+d.pov
Abbildung 15	03-a+d+p.bmp	03-a+d+p.pov
Abbildung 16	ior+ref+all.bmp	ior+ref+all.pov
Abbildung 17	grafik2.jpg	grafiken.sxd S.2

6 Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

_____ den _____
Ort Datum

Unterschrift des Schülers