

Lösungen zu Aufgabe 22 (Normalen der Seitenflächen eines Oktaeders)

a) Eckpunkte des Oktaeders

```
#declare P1 = <1,0,0> ;
#declare P2 = <0,1,0> ;
#declare P3 = <-1,0,0> ;
#declare P4 = <0,-1,0> ;
#declare P5 = <0,0,-1> ;
#declare P6 = <0,0,1> ;
```

b) Darstellung des Oktaeders

Ein „normales“ Oktaeder wird durch die Vereinigung 8 „gewöhnlicher“ Dreiecke dargestellt:

```
object { union { triangle {P1,P5,P2}
                      triangle {P1,P6,P2}
                      triangle {P3,P5,P2}
                      triangle {P3,P6,P2}
                      triangle {P1,P5,P4}
                      triangle {P1,P6,P4}
                      triangle {P3,P5,P4}
                      triangle {P3,P6,P4}
                }
      texture{...}
}
```

Glättung des Oktaeders

Für die „Glättung“ werden für jeden Punkt die Mittelwerte der Normaleneinheitsvektoren der anliegenden Dreiecke benötigt.

c), d) Gleichungen der Ebenen, denen die Seitenflächen des Oktaeders angehören, Normaleneinheitsvektoren

	Gleichung der Ebene	Normalenvektor	Normaleneinheitsvektor
Ebene durch P_1, P_5, P_2	$x + y - z = 1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$
Ebene durch P_1, P_6, P_2	$x + y + z = 1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$
Ebene durch P_1, P_5, P_4	$x - y - z = 1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$
Ebene durch P_1, P_6, P_4	$x - y + z = 1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Für die Ebenen durch P_3, P_5, P_2 , durch P_3, P_6, P_2 , durch P_3, P_5, P_4 sowie durch P_3, P_6, P_4 ergeben sich analoge Ergebnisse.

e), f) Mittelwerte der Normaleneinheitsvektoren an Punkte angrenzender Seitenflächen

Mittelwert der Normalenvektoren aller Facetten, die an P_1 grenzen: $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

durch Normierung ergibt sich $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Dieser „Mittelwertnormaleneinheitsvektor“ hat dieselben Koordinaten wie der Eckpunkt P_1 selbst, was angesichts der Lage der Normalen der an P_1 angrenzenden Seitenflächen nicht verwundert. Für alle anderen Eckpunkte besteht derselbe Zusammenhang zu den gemittelten Normalenvektoren.

g) Darstellung des geglätteten Oktaeders

Die „Mittelwertnormaleneinheitsvektoren“ werden für die Glättung der Dreiecke benötigt. Dazu werden die oben eingegebenen Dreiecke wie

```
triangle {P1,P5,P2}
```

ersetzt durch

```
smooth_triangle {P1,n1,P5,n5,P2,n2}.
```

Vorher müssen die Mittelwertnormalen angegeben werden:

```
#declare n1=<1,0,0> ;  
#declare n2=<0,1,0> ;  
#declare n3=<-1,0,0> ;  
#declare n4=<0,-1,0> ;  
#declare n5=<0,0,-1> ;  
#declare n6=<0,0,1> ;
```