

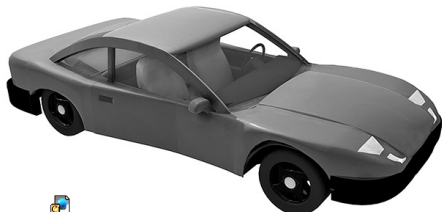
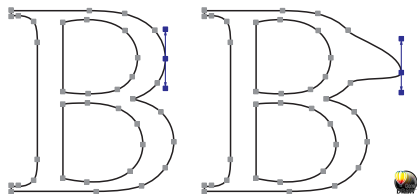
**Bézierkurven:
Von einer elementargeometrischen
Konstruktion zu einer analytischen
Beschreibung**

Andreas Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik

Deutsches Bildungsdirektion Südtirol
Bozen, 22.-23.03.2018

- ▶ DE CASTELJAU (1959, Citroën, zunächst ohne Veröffentlichung)
- ▶ BÉZIER (1961, Renault)

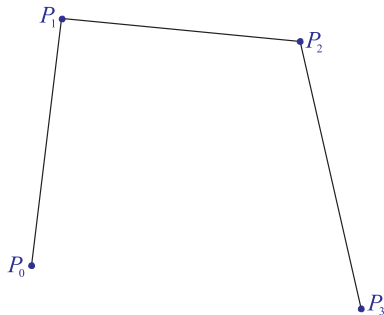


Bézierkurven

DE CASTELJAU-Algorithmus zur Erzeugung eines durch $n + 1$ Kontrollpunkte beschriebenen Kurvenstücks:

Es seien $n + 1$ Punkte P_0, \dots, P_n und $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ gegeben.

- ▶ Die Strecken $\overline{P_k P_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-1$) werden im Verhältnis t geteilt, es entstehen n Teilungspunkte Q_0, \dots, Q_{n-1} .
- ▶ Die Strecken $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-2$) werden im Verhältnis t geteilt. Es entstehen $n-1$ Teilungspunkte R_0, \dots, R_{n-2} .
- ▶ Die Strecken $\overline{R_k R_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-3$) werden im Verhältnis t geteilt



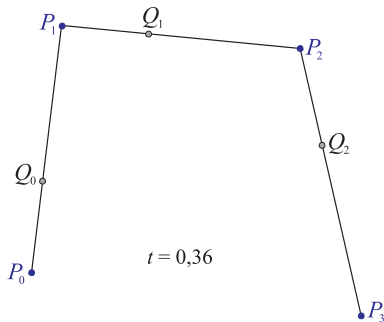
Nach n Schritten bricht das Verfahren ab, es bleibt ein Punkt X übrig. X beschreibt für $t \in [0; 1]$ ein Bézierkurvenstück.



DE CASTELJAU-Algorithmus zur Erzeugung eines durch $n + 1$ Kontrollpunkte beschriebenen Kurvenstücks:

Es seien $n + 1$ Punkte P_0, \dots, P_n und $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ gegeben.

- Die Strecken $\overline{P_k P_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-1$) werden im Verhältnis t geteilt, es entstehen n Teilungspunkte Q_0, \dots, Q_{n-1} .
- Die Strecken $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-2$) werden im Verhältnis t geteilt. Es entstehen $n-1$ Teilungspunkte R_0, \dots, R_{n-2} .
- Die Strecken $\overline{R_k R_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-3$) werden im Verhältnis t geteilt



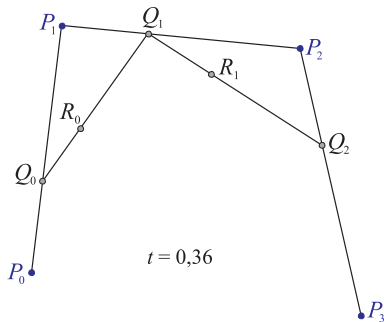
Nach n Schritten bricht das Verfahren ab, es bleibt ein Punkt X übrig. X beschreibt für $t \in [0; 1]$ ein Bézierkurvenstück.



DE CASTELJAU-Algorithmus zur Erzeugung eines durch $n + 1$ Kontrollpunkte beschriebenen Kurvenstücks:

Es seien $n + 1$ Punkte P_0, \dots, P_n und $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ gegeben.

- ▶ Die Strecken $\overline{P_k P_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-1$) werden im Verhältnis t geteilt, es entstehen n Teilungspunkte Q_0, \dots, Q_{n-1} .
- ▶ Die Strecken $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-2$) werden im Verhältnis t geteilt. Es entstehen $n-1$ Teilungspunkte R_0, \dots, R_{n-2} .
- ▶ Die Strecken $\overline{R_k R_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-3$) werden im Verhältnis t geteilt



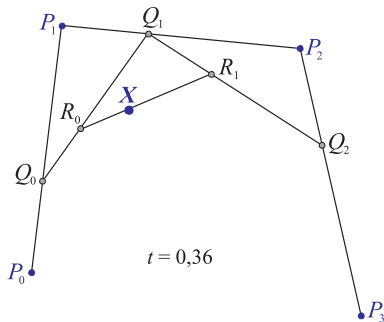
Nach n Schritten bricht das Verfahren ab, es bleibt ein Punkt X übrig. X beschreibt für $t \in [0; 1]$ ein Bézierkurvenstück.



DE CASTELJAU-Algorithmus zur Erzeugung eines durch $n + 1$ Kontrollpunkte beschriebenen Kurvenstücks:

Es seien $n + 1$ Punkte P_0, \dots, P_n und $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ gegeben.

- ▶ Die Strecken $\overline{P_k P_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-1$) werden im Verhältnis t geteilt, es entstehen n Teilungspunkte Q_0, \dots, Q_{n-1} .
- ▶ Die Strecken $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-2$) werden im Verhältnis t geteilt. Es entstehen $n-1$ Teilungspunkte R_0, \dots, R_{n-2} .
- ▶ Die Strecken $\overline{R_k R_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-3$) werden im Verhältnis t geteilt



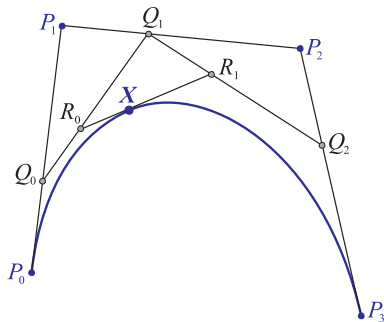
Nach n Schritten bricht das Verfahren ab, es bleibt ein Punkt X übrig. X beschreibt für $t \in [0; 1]$ ein **Bézierkurvenstück**.



DE CASTELJAU-Algorithmus zur Erzeugung eines durch $n + 1$ Kontrollpunkte beschriebenen Kurvenstücks:

Es seien $n + 1$ Punkte P_0, \dots, P_n und $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ gegeben.

- ▶ Die Strecken $\overline{P_k P_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-1$) werden im Verhältnis t geteilt, es entstehen n Teilungspunkte Q_0, \dots, Q_{n-1} .
- ▶ Die Strecken $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-2$) werden im Verhältnis t geteilt. Es entstehen $n-1$ Teilungspunkte R_0, \dots, R_{n-2} .
- ▶ Die Strecken $\overline{R_k R_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-3$) werden im Verhältnis t geteilt

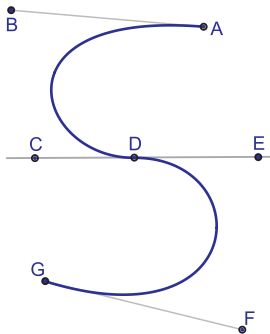


Nach n Schritten bricht das Verfahren ab, es bleibt ein Punkt X übrig. X beschreibt für $t \in [0; 1]$ ein **Bézierkurvenstück**.



Modellierung von Formen durch zusammengesetzte Bézierkurvenstücke

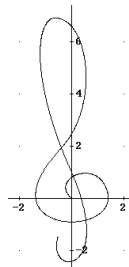
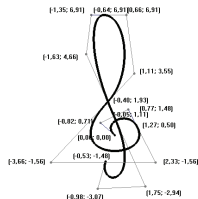
- ▶ neues Werkzeug in Geogebra
- ▶ glatte Übergänge durch Berücksichtigung von Tangenten



Modellierung von Formen durch zusammengesetzte Bézierkurvenstücke

Der Violinschlüssel

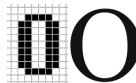
Wir haben uns dafür entschieden, einen Violinschlüssel zu designen. Welche Probleme tauchten dabei auf? Wir wussten erst mal nicht, wie viele Bézierkurven wir benötigen würden, also haben wir einfach mal angefangen. Beim Aneinanderhängen der Kurven kamen wir dann zu dem Problem, dass wir glatte Übergänge haben wollten, die auch bei Veränderung der Lage der Punkte erhalten bleiben. Denn sonst muss man im nachhinein immer nachkorrigieren und das ist sehr mühsam. Bei der Beschäftigung mit diesem Problem ist uns bewusst geworden, dass wir die uns bekannten Ideen und Begriffe aus der Analysis wieder verwenden konnten. Zwar hatten wir nicht mehr alle Ideen und Begriffe parat, aber wir konnten ja alles nachlesen. Und dann haben wir uns dieses Thema mit der Unterstützung unserer Lehrerin erarbeitet. Die Kurven letztendlich zu algebraisieren, war nicht schwierig, denn die Idee, die dahinter steckt, ist einfach zu verstehen. Wir waren froh, dass wir ein Programm wie DERIVE hatten, was uns die Kurven berechnet hat, denn ansonsten wäre das sehr mühsam geworden.



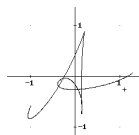
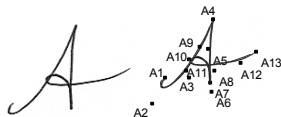
Modellierung von Formen durch zusammengesetzte Bézierkurvenstücke

Font-Design

[...] Im wesentlichen gibt es zwei Arten von digitalen Schriften: Raster und Umriss-schriften. Bei Rasterschriften wird jeder Buchstabe und jedes Zeichen (allgemein: Glyph) als Bitmap abgelegt. [...] Umriss-schriftarten werden durch quadratische (True-Type-Schriften) oder kubische Bézierpolynome (Post-script-Schriften) dargestellt. Es wird also nur ein Polygonzug (P_0, P_1, P_2, \dots) abgespeichert. Mit Hilfe eines Polygonzuges kann der Glyph in allen Größen dargestellt werden [...]



Wir wollen das Prinzip exemplarisch an einem Buchstaben zeigen. Wir schreiben den Buchstaben A auf ein Blatt und scannen ihn ein. Dieses gescannte Bild fügen wir als Hintergrundbild in EUKLID-DYNAGEO ein, damit wir es mit Bézierkurven, insgesamt vier Stück, nachstellen können. Die Koordinaten der Punkte A1 bis A13 erhalten wir, indem wir die Datei als *.script-Datei abspeichern, damit haben wir die Koordinaten in txt-Form, so dass wir sie in DERIVE einfügen können.

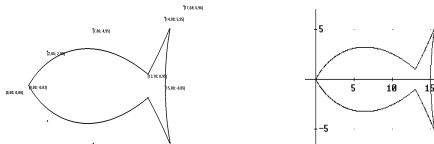


Jetzt brauchen wir nur noch die Bézierkurven vektoriell darstellen und die Kurven mit Hilfe von CAS zeichnen zu lassen. Wie man sieht, braucht man nur die Stützpunkte einzugeben, um den Buchstaben zu erzeugen. Will man ihn in einer größeren Schrift, so muss man nur die Funktionen mit dem entsprechenden Faktor multiplizieren [...].

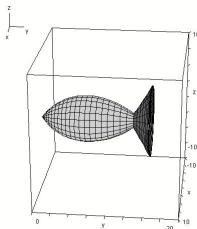
Modellierung von Formen durch zusammengesetzte Bézierkurvenstücke

Der Fisch

Wir wollten einen Fisch designen. Hierzu benötigten wir im wesentlichen zwei Bézierkurven, die dann gespiegelt wurden.



Was uns dann am meisten interessiert hat, war, wie man den Fisch dreidimensional darstellen kann. Aus der Analysis erinnerten wir uns dunkel an das Rotieren von Körpern. [...]



Algebraische Beschreibung von Bézierkurven

Voraussetzung: Parameterdarstellungen von Strecken

Mit $P_0, \dots, Q_0, \dots, R_0, X$ bezeichnen wir im Folgenden die den Punkten bzgl. eines kartesischen KS zugeordneten Zahlenpaare.

Parameterdarstellung der Strecke $\overline{R_0R_1}$:

$$X(t) = R_0 + t \cdot (R_1 - R_0) = (1-t) \cdot R_0 + t \cdot R_1$$

Strecken $\overline{Q_0Q_1}$ und $\overline{Q_1Q_2}$:

$$R_0(t) = (1-t) \cdot Q_0 + t \cdot Q_1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$R_1(t) = (1-t) \cdot Q_1 + t \cdot Q_2$$

Strecken $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_2P_3}$:

$$Q_0(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1$$

$$Q_1(t) = (1-t) \cdot P_1 + t \cdot P_2$$

$$Q_2(t) = (1-t) \cdot P_2 + t \cdot P_3$$

Einsetzen: $X(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$

Algebraische Beschreibung von Bézierkurven

Voraussetzung: Parameterdarstellungen von Strecken

Mit $P_0, \dots, Q_0, \dots, R_0, X$ bezeichnen wir im Folgenden die den Punkten bzgl. eines kartesischen KS zugeordneten Zahlenpaare.

Parameterdarstellung der Strecke $\overline{R_0R_1}$:

$$X(t) = R_0 + t \cdot (R_1 - R_0) = (1-t) \cdot R_0 + t \cdot R_1$$

Strecken $\overline{Q_0Q_1}$ und $\overline{Q_1Q_2}$:

$$R_0(t) = (1-t) \cdot Q_0 + t \cdot Q_1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

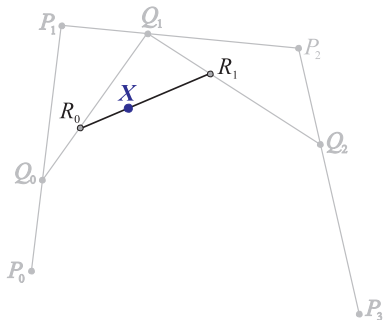
$$R_1(t) = (1-t) \cdot Q_1 + t \cdot Q_2$$

Strecken $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_2P_3}$:

$$Q_0(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1$$

$$Q_1(t) = (1-t) \cdot P_1 + t \cdot P_2$$

$$Q_2(t) = (1-t) \cdot P_2 + t \cdot P_3$$



$$\text{Einsetzen: } X(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

Algebraische Beschreibung von Bézierkurven

Voraussetzung: Parameterdarstellungen von Strecken

Mit $P_0, \dots, Q_0, \dots, R_0, X$ bezeichnen wir im Folgenden die den Punkten bzgl. eines kartesischen KS zugeordneten Zahlenpaare.

Parameterdarstellung der Strecke $\overline{R_0R_1}$:

$$X(t) = R_0 + t \cdot (R_1 - R_0) = (1-t) \cdot R_0 + t \cdot R_1$$

Strecken $\overline{Q_0Q_1}$ und $\overline{Q_1Q_2}$:

$$R_0(t) = (1-t) \cdot Q_0 + t \cdot Q_1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$R_1(t) = (1-t) \cdot Q_1 + t \cdot Q_2$$

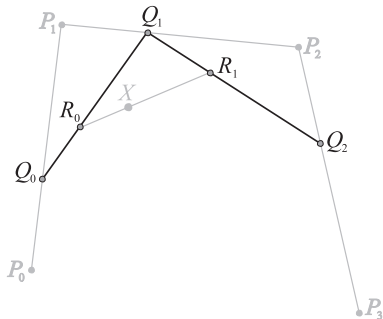
Strecken $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_2P_3}$:

$$Q_0(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1$$

$$Q_1(t) = (1-t) \cdot P_1 + t \cdot P_2$$

$$Q_2(t) = (1-t) \cdot P_2 + t \cdot P_3$$

Einsetzen: $X(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$



Algebraische Beschreibung von Bézierkurven

Voraussetzung: Parameterdarstellungen von Strecken

Mit $P_0, \dots, Q_0, \dots, R_0, X$ bezeichnen wir im Folgenden die den Punkten bzgl. eines kartesischen KS zugeordneten Zahlenpaare.

Parameterdarstellung der Strecke $\overline{R_0R_1}$:

$$X(t) = R_0 + t \cdot (R_1 - R_0) = (1-t) \cdot R_0 + t \cdot R_1$$

Strecken $\overline{Q_0Q_1}$ und $\overline{Q_1Q_2}$:

$$R_0(t) = (1-t) \cdot Q_0 + t \cdot Q_1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

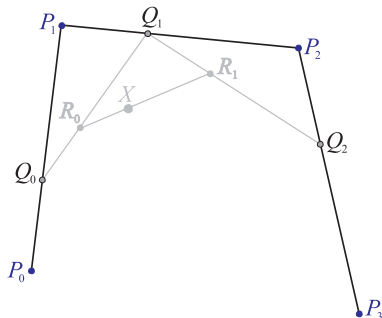
$$R_1(t) = (1-t) \cdot Q_1 + t \cdot Q_2$$

Strecken $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_2P_3}$:

$$Q_0(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1$$

$$Q_1(t) = (1-t) \cdot P_1 + t \cdot P_2$$

$$Q_2(t) = (1-t) \cdot P_2 + t \cdot P_3$$



Einsetzen: $X(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$

Algebraische Beschreibung von Bézierkurven

Voraussetzung: Parameterdarstellungen von Strecken

Mit $P_0, \dots, Q_0, \dots, R_0, X$ bezeichnen wir im Folgenden die den Punkten bzgl. eines kartesischen KS zugeordneten Zahlenpaare.

Parameterdarstellung der Strecke $\overline{R_0R_1}$:

$$X(t) = R_0 + t \cdot (R_1 - R_0) = (1-t) \cdot R_0 + t \cdot R_1$$

Strecken $\overline{Q_0Q_1}$ und $\overline{Q_1Q_2}$:

$$R_0(t) = (1-t) \cdot Q_0 + t \cdot Q_1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$R_1(t) = (1-t) \cdot Q_1 + t \cdot Q_2$$

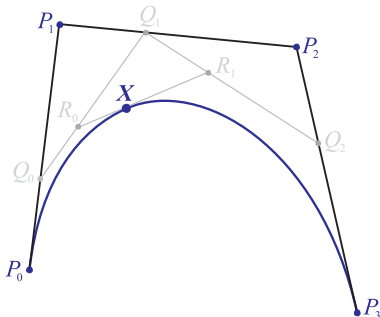
Strecken $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_1P_2}$:

$$Q_0(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1$$

$$Q_1(t) = (1-t) \cdot P_1 + t \cdot P_2$$

$$Q_2(t) = (1-t) \cdot P_2 + t \cdot P_3$$

Einsetzen: $X(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$



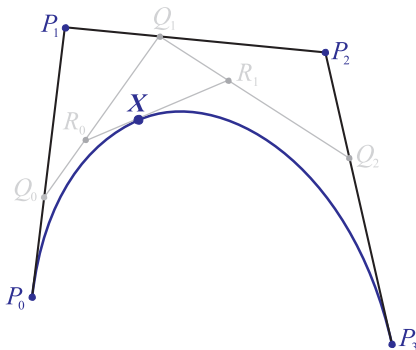
Algebraische Beschreibung von Bézierkurven

$$\begin{aligned}X(t) &= (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3 \\&= \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{3-i} \cdot P_i \\&= \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \cdot P_i\end{aligned}$$

mit den Bernstein-Polynomen

$$B_{i,3}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

S. N. Bernstein (1911)



Allgemein (für ein Bézierkurvenstück mit n Kontrollpunkten):

$$X(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot P_i \quad \text{mit} \quad B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Bernstein-
polynome
4. Grades



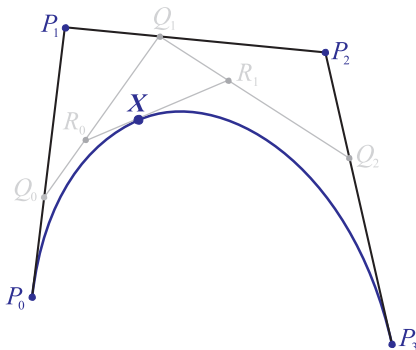
Algebraische Beschreibung von Bézierkurven

$$\begin{aligned}X(t) &= (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3 \\&= \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{3-i} \cdot P_i \\&= \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \cdot P_i\end{aligned}$$

mit den **Bernstein-Polynomen**

$$B_{i,3}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

S. N. Bernstein (1911)



Allgemein (für ein Bézierkurvenstück mit n Kontrollpunkten):

$$X(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot P_i \quad \text{mit} \quad B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Bernstein-
polynome
4. Grades



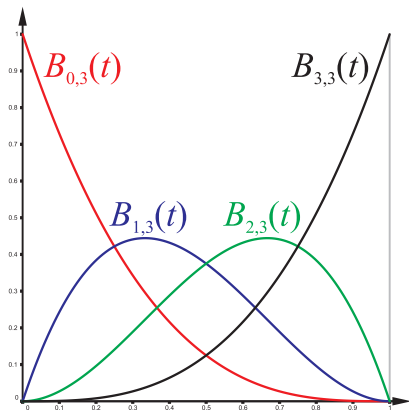
Algebraische Beschreibung von Bézierkurven

$$\begin{aligned}X(t) &= (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3 \\&= \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{3-i} \cdot P_i \\&= \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \cdot P_i\end{aligned}$$

mit den **Bernstein-Polynomen**

$$B_{i,3}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

S. N. Bernstein (1911)



Allgemein (für ein Bézierkurvenstück mit n Kontrollpunkten):

$$X(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot P_i \quad \text{mit} \quad B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Bernstein-
polynome
4. Grades



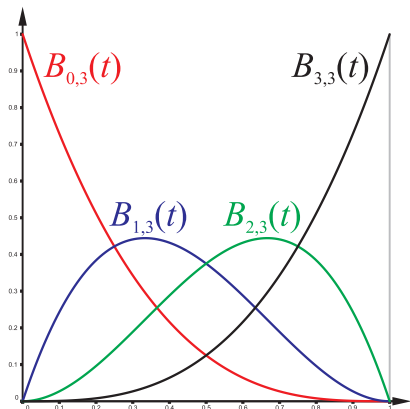
Algebraische Beschreibung von Bézierkurven

$$\begin{aligned}X(t) &= (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3 \\&= \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{3-i} \cdot P_i \\&= \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \cdot P_i\end{aligned}$$

mit den **Bernstein-Polynomen**

$$B_{i,3}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

S. N. Bernstein (1911)



Allgemein (für ein Bézierkurvenstück mit n Kontrollpunkten):

$$X(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot P_i \quad \text{mit} \quad B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Bernstein-
polynome
4. Grades



Weitere Überlegungen zu Bézierkurven

- ▶ **Symmetrie:** $B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$
für beliebige $t \in [0; 1]$, $i = 0 \dots n$
- ▶ $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$ f. a. $t \in [0; 1]$
- ▶ Jede Bézierkurve liegt innerhalb
der **konvexen Hülle** ihres Kontroll-
polygons.

Tangenten an Bezierkurvenstücke

Schüler kennen i. Allg. keine Ableitungen von Vektorfunktionen, wie z. B.

$$X(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

Plausibel machen: Analogie zur Ableitung reellwertiger Funktionen; Ableitung einer Vektorfunktion an einer Stelle: Tangenten- und Geschwindigkeitsvektor

Interessant sind v. a. die nur einseitig differenzierbaren Randpunkte

Ergebnis: Tangentenvektoren in den Randpunkten:

$$X'(t)|_{t=0} = 3(P_1 - P_0), \quad X'(t)|_{t=1} = 3(P_3 - P_2).$$

Weitere Überlegungen zu Bézierkurven

- ▶ **Symmetrie:** $B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$
für beliebige $t \in [0; 1]$, $i = 0 \dots n$
- ▶ $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$ f.a. $t \in [0; 1]$
- ▶ Jede Bézierkurve liegt innerhalb der **konvexen Hülle** ihres Kontrollpolygons.

Tangenten an Bézierkurvenstücke

Schüler kennen i. Allg. keine Ableitungen von Vektorfunktionen, wie z. B.

$$X(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

Plausibel machen: Analogie zur Ableitung reellwertiger Funktionen; Ableitung einer Vektorfunktion an einer Stelle: Tangenten- und Geschwindigkeitsvektor

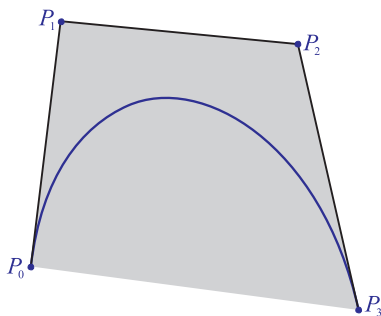
Interessant sind v. a. die nur einseitig differenzierbaren Randpunkte

Ergebnis: Tangentenvektoren in den Randpunkten:

$$X'(t)|_{t=0} = 3(P_1 - P_0), \quad X'(t)|_{t=1} = 3(P_3 - P_2).$$

Weitere Überlegungen zu Bézierkurven

- ▶ **Symmetrie:** $B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$
für beliebige $t \in [0; 1]$, $i = 0 \dots n$
- ▶ $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$ f. a. $t \in [0; 1]$
- ▶ Jede Bézierkurve liegt innerhalb der **konvexen Hülle ihres Kontrollpolygons**.



Tangenten an Bézierkurvenstücke

Schüler kennen i. Allg. keine Ableitungen von Vektorfunktionen, wie z. B.

$$X(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

Plausibel machen: Analogie zur Ableitung reellwertiger Funktionen; Ableitung einer Vektorfunktion an einer Stelle: Tangenten- und Geschwindigkeitsvektor

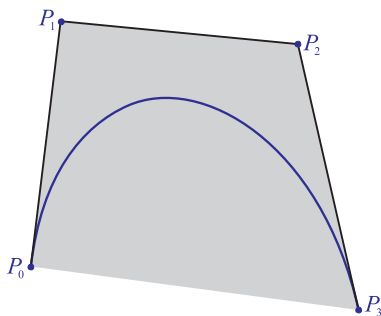
Interessant sind v. a. die nur einseitig differenzierbaren Randpunkte

Ergebnis: Tangentenvektoren in den Randpunkten:

$$X'(t)|_{t=0} = 3(P_1 - P_0), \quad X'(t)|_{t=1} = 3(P_3 - P_2).$$

Weitere Überlegungen zu Bézierkurven

- ▶ **Symmetrie:** $B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$
für beliebige $t \in [0; 1]$, $i = 0 \dots n$
- ▶ $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$ f. a. $t \in [0; 1]$
- ▶ Jede Bézierkurve liegt innerhalb der **konvexen Hülle ihres Kontrollpolygons**.



Tangenten an Bezierkurvenstücke

Schüler kennen i. Allg. keine Ableitungen von Vektorfunktionen, wie z. B.

$$X(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

Plausibel machen: Analogie zur Ableitung reellwertiger Funktionen; Ableitung einer Vektorfunktion an einer Stelle: Tangenten- und Geschwindigkeitsvektor

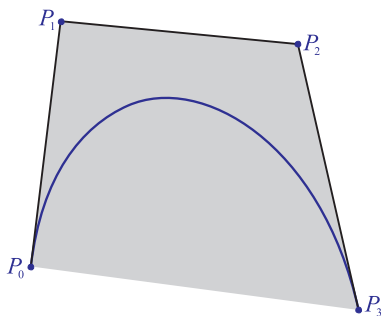
Interessant sind v. a. die nur einseitig differenzierbaren Randpunkte

Ergebnis: Tangentenvektoren in den Randpunkten:

$$X'(t)|_{t=0} = 3(P_1 - P_0), \quad X'(t)|_{t=1} = 3(P_3 - P_2).$$

Weitere Überlegungen zu Bézierkurven

- ▶ **Symmetrie:** $B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$
für beliebige $t \in [0; 1]$, $i = 0 \dots n$
- ▶ $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$ f. a. $t \in [0; 1]$
- ▶ Jede Bézierkurve liegt innerhalb der **konvexen Hülle ihres Kontrollpolygons**.



Tangenten an Bezierkurvenstücke

Schüler kennen i. Allg. keine Ableitungen von Vektorfunktionen, wie z. B.

$$X(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

Plausibel machen: Analogie zur Ableitung reellwertiger Funktionen; Ableitung einer Vektorfunktion an einer Stelle: Tangenten- und Geschwindigkeitsvektor

Interessant sind v. a. die nur einseitig differenzierbaren Randpunkte

Ergebnis: Tangentenvektoren in den Randpunkten:

$$X'(t)|_{t=0} = 3(P_1 - P_0), \quad X'(t)|_{t=1} = 3(P_3 - P_2).$$