

Didaktik der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

Das Skalarprodukt, metrische Geometrie von Geraden und Ebenen

Andreas Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik



Deutsches Bildungsdirektion Südtirol

Bozen, 22.-23.03.2018

Das Skalarprodukt, metrische Geometrie von Geraden und Ebenen

Abstand zweier Punkte/ Länge (Betrag) eines Vektors

Das Skalarprodukt

Wege zum Skalarprodukt

Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt

Metrische Geometrie von Geraden und Ebenen

Normalengleichungen

Abstand eines Punktes von einer Ebene

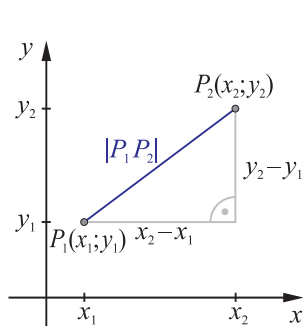
Hesse'sche Normalform

Weitere Abstände im Raum

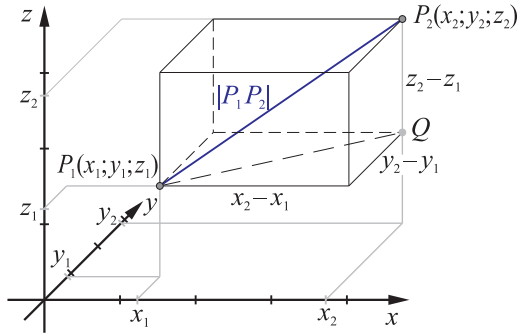
Winkelberechnungen

Abstand zweier Punkte

Bereits in der Sekundarstufe I mit dem **Satz des Pythagoras** herleitbar:



Abstand zweier Punkte in der Ebene



Abstand zweier Punkte des Raumes

Abstand zweier Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ der Ebene:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Abstand zweier Punkte $P_1(x_1; y_1; z_1)$, $P_2(x_2; y_2; z_2)$ des Raumes:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

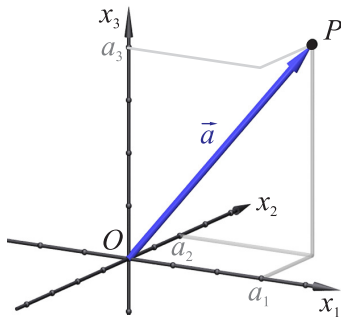
Länge (Betrag) eines Vektors

Betrag eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

bzw.

$$|\vec{a}|^2 = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3$$



Eigenschaften:

$$\triangleright |\vec{a}| \geq 0$$

$$\triangleright |\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$$

$$\triangleright |\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

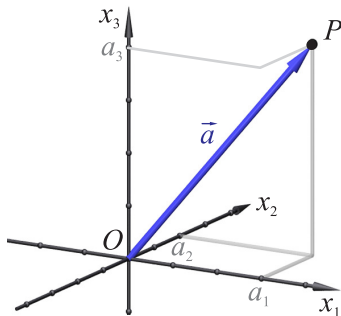
Länge (Betrag) eines Vektors

Betrag eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

bzw.

$$|\vec{a}|^2 = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3$$



Eigenschaften:

► $|\vec{a}| \geq 0$

► $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$

► $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Abstand zweier Punkte/ Länge (Betrag) eines Vektors

Das Skalarprodukt

Wege zum Skalarprodukt

Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt

Metrische Geometrie von Geraden und Ebenen

Normalengleichungen

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Hesse'sche Normalform

Weitere Abstände im Raum

Winkelberechnungen

Wege zum Skalarprodukt

1. **Geometrisch orientierte Zugänge:** Im Mittelpunkt steht, dass sich das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v}$ zweier Vektoren als Produkt ihrer Beträge (Längen) und des Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ergibt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) .$$

2. **Arithmetisch orientierte Zugänge:** Skalarprodukt zweier als n -Tupel aufgefasster Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ als Summe der Produkte der einander entsprechenden Komponenten:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i .$$

3. **Strukturorientierte, axiomatische Zugänge:** Skalarprodukt als *positiv definite symmetrische Bilinearform* auf einem beliebigen (reellen) Vektorraum V .

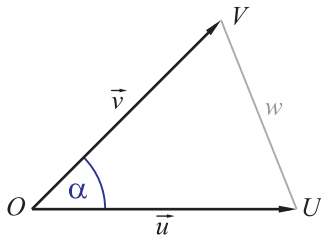
Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt

Bekannt: Länge (Betrag) eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Gesucht: Maß eines Winkels $\alpha = \angle(UOV)$

$$\text{mit } \overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$



Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt

Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Beweis: Betrachten die Höhe h auf die Seite c , die c in die Strecken d und e teilt (analoges Vorgehen, wenn der Fußpunkt von h außerhalb der Seite c liegt).

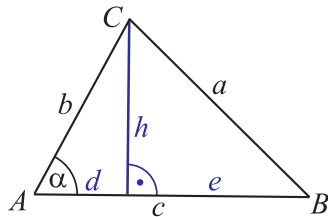
Es gilt:

$$h^2 = b^2 - d^2$$

$$e^2 = (c - d)^2 = c^2 - 2cd + d^2$$

$$a^2 = h^2 + e^2 = b^2 - d^2 + c^2 - 2cd + d^2 = c^2 + b^2 - 2cd$$

Wegen $\cos \alpha = \frac{d}{b}$, also $d = b \cdot \cos \alpha$, folgt die Behauptung.



Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Beweis: Betrachten die Höhe h auf die Seite c , die c in die Strecken d und e teilt (analoges Vorgehen, wenn der Fußpunkt von h außerhalb der Seite c liegt).

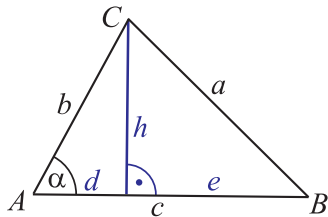
Es gilt:

$$h^2 = b^2 - d^2$$

$$e^2 = (c - d)^2 = c^2 - 2cd + d^2$$

$$a^2 = h^2 + e^2 = b^2 - d^2 + c^2 - 2cd + d^2 = c^2 + b^2 - 2cd$$

Wegen $\cos \alpha = \frac{d}{b}$, also $d = b \cdot \cos \alpha$, folgt die Behauptung.



Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt

Winkelberechnung:

- ▶ Setzen $u = |OU|$, $v = |OV|$, $w = |UV|$
- ▶ Kosinussatz:

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos \alpha$$

- ▶ Nach $\cos \alpha$ auflösen:

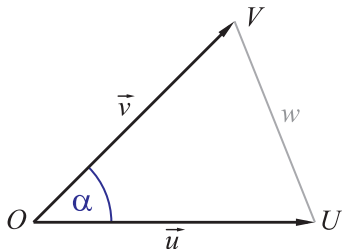
$$\cos \alpha = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2 \cdot u \cdot v}$$

- ▶ Zähler des obigen Bruchs durch die Koordinaten von U und V ausdrücken:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - w^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &\quad - \left[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \right] \\ &= 2 \cdot (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3) \end{aligned}$$

- ▶ Erhalten:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$



Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt

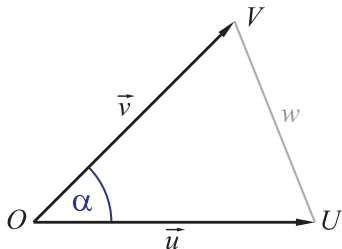
Winkelberechnung:

- ▶ Setzen $u = |OU|$, $v = |OV|$, $w = |UV|$
- ▶ Kosinussatz:

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos \alpha$$

- ▶ Nach $\cos \alpha$ auflösen:

$$\cos \alpha = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2 \cdot u \cdot v}$$



- ▶ Zähler des obigen Bruchs durch die Koordinaten von U und V ausdrücken:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - w^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &\quad - [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2] \\ &= 2 \cdot (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3) \end{aligned}$$

- ▶ Erhalten:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt

Winkelberechnung:

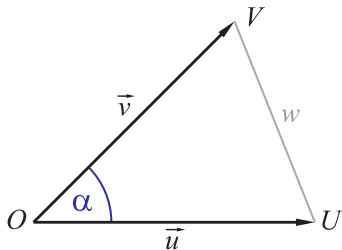
- ▶ Setzen $u = |OU|$, $v = |OV|$, $w = |UV|$

- ▶ Kosinussatz:

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos \alpha$$

- ▶ Nach $\cos \alpha$ auflösen:

$$\cos \alpha = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2 \cdot u \cdot v}$$



- ▶ Zähler des obigen Bruchs durch die Koordinaten von U und V ausdrücken:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - w^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &\quad - \left[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \right] \\ &= 2 \cdot (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3) \end{aligned}$$

- ▶ Erhalten:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt

Winkelberechnung:

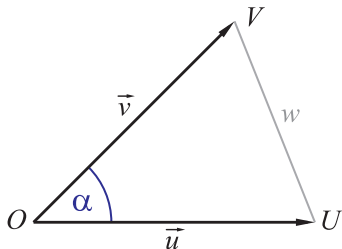
- ▶ Setzen $u = |OU|$, $v = |OV|$, $w = |UV|$

- ▶ Kosinussatz:

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos \alpha$$

- ▶ Nach $\cos \alpha$ auflösen:

$$\cos \alpha = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2 \cdot u \cdot v}$$



- ▶ Zähler des obigen Bruchs durch die Koordinaten von U und V ausdrücken:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - w^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &\quad - \left[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \right] \\ &= 2 \cdot (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3) \end{aligned}$$

- ▶ Erhalten:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

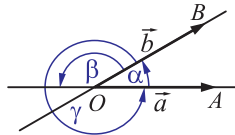
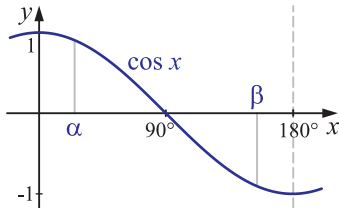
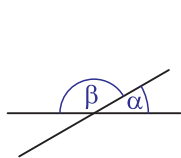
Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt

Winkelberechnung:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

Diese Formel berechnet den **unorientierten Winkel**:

- ▶ Sind $\beta = 180^\circ - \alpha$ und $\gamma = 360^\circ - \alpha$,
so gilt $\cos \beta = -\cos \alpha$ und $\cos \gamma = \cos \alpha$.
- ▶ $\alpha = \angle(AOB)$ und $\gamma = \angle(BOA)$ haben denselben Kosinuswert.
- ▶ Um β zu berechnen, muss man z. B. die Vektoren \vec{a} und $-\vec{b}$ benutzen.



Zusammenfassung/ Einführung des Skalarprodukts

Winkelberechnung:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

Wir definieren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$

Dabei sind x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die Koordinaten von \vec{a} bzw. \vec{b} bezüglich eines **kartesischen Koordinatensystems**.

Damit ist:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Wichtiger Spezialfall:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

Zusammenfassung/ Einführung des Skalarprodukts

Winkelberechnung:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

Wir definieren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$

Dabei sind x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die Koordinaten von \vec{a} bzw. \vec{b} bezüglich eines **kartesischen Koordinatensystems**.

Damit ist:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Wichtiger Spezialfall:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

Zusammenfassung/ Einführung des Skalarprodukts

Winkelberechnung:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

Wir definieren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$

Dabei sind x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die Koordinaten von \vec{a} bzw. \vec{b} bezüglich eines **kartesischen Koordinatensystems**.

Damit ist:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Wichtiger Spezialfall:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

Abstand zweier Punkte/ Länge (Betrag) eines Vektors

Das Skalarprodukt

Wege zum Skalarprodukt

Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt

Metrische Geometrie von Geraden und Ebenen

Normalengleichungen

Abstand eines Punktes von einer Ebene

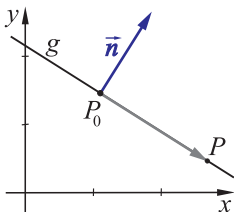
Hesse'sche Normalform

Weitere Abstände im Raum

Winkelberechnungen

Normalengleichungen von Geraden in der Ebene

Alle Punkte P der Ebene, deren Verbindungsvektoren $\overrightarrow{P_0P}$ mit einem Punkt P_0 zu einem Vektor \vec{n} ($\vec{n} \neq \vec{o}$) orthogonal sind, liegen auf einer Geraden.



- ▶ Ein zu einer Geraden g orthogonaler Vektor \vec{n} (mit $\vec{n} \neq \vec{o}$) heißt *Normalenvektor* der Geraden g .
- ▶ Ist g eine Gerade, P_0 ein Punkt und \vec{n} ein Normalenvektor von g , so ist die Gleichung $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ eine *Normalengleichung* der Geraden g .

Normalengleichungen von Geraden in der Ebene

Beispiel:

Eine Gerade g ist durch die Parametergleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben. Gesucht ist eine Normalengleichung von g .

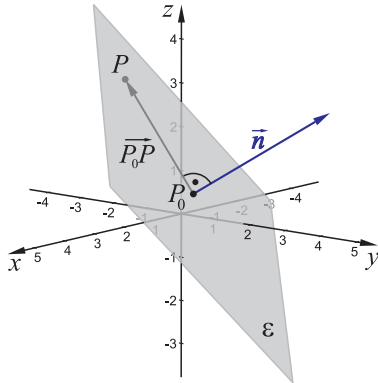
- ▶ Normalengleichung
- ▶ Koordinatengleichung

Normalengleichungen von Ebenen

Alle Punkte P des Raumes, deren Verbindungsvektoren $\overrightarrow{P_0P}$ mit einem Punkt P_0 zu einem Vektor \vec{n} ($\vec{n} \neq \vec{0}$) orthogonal sind, liegen in einer Ebene.

- ▶ Vektor \vec{n} , der zu einer Ebene ε senkrecht ist: *Normalenvektor* von ε .
- ▶ Die Lage einer Ebene ε im Raum ist durch einen Punkt $P_0 \in \varepsilon$ und einen Normalenvektor \vec{n} eindeutig bestimmt.
- ▶ Ein Punkt P liegt genau dann in ε , wenn $\overrightarrow{P_0P}$ zu \vec{n} orthogonal ist, also $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.
- ▶ Ist ε eine Ebene, P_0 ein Punkt und \vec{n} ein Normalenvektor von ε , so heißt $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

Normalengleichung der Ebene ε .

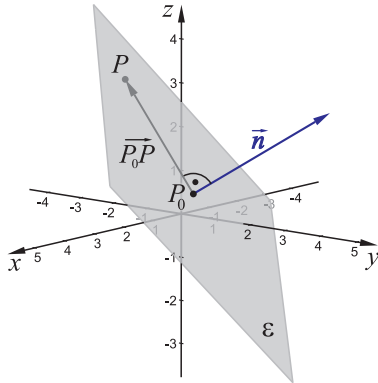


Normalengleichungen von Ebenen

Alle Punkte P des Raumes, deren Verbindungsvektoren $\overrightarrow{P_0P}$ mit einem Punkt P_0 zu einem Vektor \vec{n} ($\vec{n} \neq \vec{0}$) orthogonal sind, liegen in einer Ebene.

- ▶ Vektor \vec{n} , der zu einer Ebene ε senkrecht ist: *Normalenvektor* von ε .
- ▶ Die Lage einer Ebene ε im Raum ist durch einen Punkt $P_0 \in \varepsilon$ und einen Normalenvektor \vec{n} eindeutig bestimmt.
- ▶ Ein Punkt P liegt genau dann in ε , wenn $\overrightarrow{P_0P}$ zu \vec{n} orthogonal ist, also $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.
- ▶ Ist ε eine Ebene, P_0 ein Punkt und \vec{n} ein Normalenvektor von ε , so heißt $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

Normalengleichung der Ebene ε .

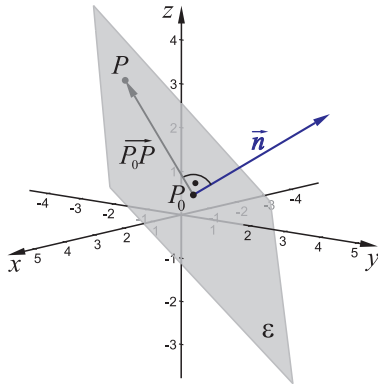


Normalengleichungen von Ebenen

Alle Punkte P des Raumes, deren Verbindungsvektoren $\overrightarrow{P_0P}$ mit einem Punkt P_0 zu einem Vektor \vec{n} ($\vec{n} \neq \vec{0}$) orthogonal sind, liegen in einer Ebene.

- ▶ Vektor \vec{n} , der zu einer Ebene ε senkrecht ist: *Normalenvektor* von ε .
- ▶ Die Lage einer Ebene ε im Raum ist durch einen Punkt $P_0 \in \varepsilon$ und einen Normalenvektor \vec{n} eindeutig bestimmt.
- ▶ Ein Punkt P liegt genau dann in ε , wenn $\overrightarrow{P_0P}$ zu \vec{n} orthogonal ist, also $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.
- ▶ Ist ε eine Ebene, P_0 ein Punkt und \vec{n} ein Normalenvektor von ε , so heißt $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

Normalengleichung der Ebene ε .



Normalengleichungen von Ebenen

Beispiel: Bestimmung einer Normalengleichung aus einer Parametergleichung einer Ebene

Gegeben ist die Parametergleichung einer Ebene

$$\varepsilon: \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gesucht eine Normalengleichung.

► Mit oder ohne Vektorprodukt?

Satz: Ist $ax + by + cz = d$ eine Gleichung einer Ebene ε , so ist der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von ε .

Normalengleichungen von Ebenen

Beispiel: Bestimmung einer Normalengleichung aus einer Parametergleichung einer Ebene

Gegeben ist die Parametergleichung einer Ebene

$$\varepsilon: \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gesucht eine Normalengleichung.

- ▶ Mit oder ohne Vektorprodukt?

Satz: Ist $ax + by + cz = d$ eine Gleichung einer Ebene ε , so ist der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von ε .

Normalengleichungen von Ebenen

Beispiel: Bestimmung einer Normalengleichung aus einer Parametergleichung einer Ebene

Gegeben ist die Parametergleichung einer Ebene

$$\varepsilon: \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gesucht eine Normalengleichung.

- Mit oder ohne Vektorprodukt?

Satz: Ist $ax + by + cz = d$ eine Gleichung einer Ebene ε , so ist der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von ε .

Abstand eines Punktes von einer Ebene

- ▶ Wie würde man den Abstand eines Punktes von einer Ebene **messen**?

- ▶ Normalengleichung einer Ebene:

$$E : \vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$$

- ▶ Das Lot von Q auf E schneidet E in einem Punkt R . Damit ist

$$d(Q, E) = |RQ|$$

der gesuchte Abstand.

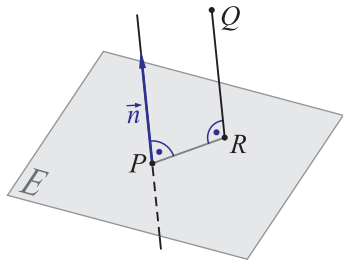
- ▶ Es gilt $\vec{QR} = \lambda \cdot \vec{n}$, also $d(Q, E) = |QR| = |\lambda \cdot \vec{n}|$.

- ▶ Da R in der Ebene E liegt, gilt

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{PR} = (\vec{PQ} + \lambda \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{PQ} \cdot \vec{n} + \lambda \cdot \vec{n}^2, \text{ also } \lambda = -\frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2}$$

- ▶ Damit folgt für den gesuchten Abstand:

$$d(Q, E) = |QR| = |\lambda \cdot \vec{n}| = |\lambda| \cdot |\vec{n}| = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}| \cdot |\vec{n}|}{\vec{n}^2} = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$



Abstand eines Punktes von einer Ebene

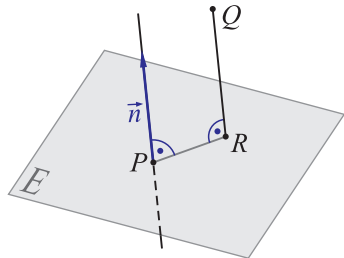
- ▶ Wie würde man den Abstand eines Punktes von einer Ebene messen?
- ▶ Normalengleichung einer Ebene:

$$E : \vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$$

- ▶ Das Lot von Q auf E schneidet E in einem Punkt R . Damit ist

$$d(Q, E) = |RQ|$$

der gesuchte Abstand.



- ▶ Es gilt $\vec{QR} = \lambda \cdot \vec{n}$, also $d(Q, E) = |QR| = |\lambda \cdot \vec{n}|$.
- ▶ Da R in der Ebene E liegt, gilt

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{PR} = (\vec{PQ} + \lambda \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{PQ} \cdot \vec{n} + \lambda \cdot \vec{n}^2, \text{ also } \lambda = -\frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2}$$

- ▶ Damit folgt für den gesuchten Abstand:

$$d(Q, E) = |QR| = |\lambda \cdot \vec{n}| = |\lambda| \cdot |\vec{n}| = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}| \cdot |\vec{n}|}{\vec{n}^2} = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

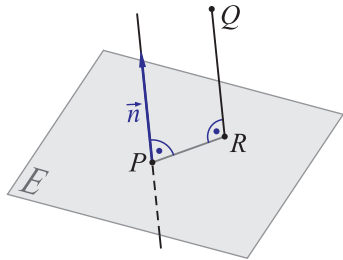
- ▶ Wie würde man den Abstand eines Punktes von einer Ebene messen?
- ▶ Normalengleichung einer Ebene:

$$E : \vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$$

- ▶ Das Lot von Q auf E schneidet E in einem Punkt R . Damit ist

$$d(Q, E) = |RQ|$$

der gesuchte Abstand.



- ▶ Es gilt $\vec{QR} = \lambda \cdot \vec{n}$, also $d(Q, E) = |QR| = |\lambda \cdot \vec{n}|$.

- ▶ Da R in der Ebene E liegt, gilt

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{PR} = (\vec{PQ} + \lambda \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{PQ} \cdot \vec{n} + \lambda \cdot \vec{n}^2, \text{ also } \lambda = -\frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2}$$

- ▶ Damit folgt für den gesuchten Abstand:

$$d(Q, E) = |QR| = |\lambda \cdot \vec{n}| = |\lambda| \cdot |\vec{n}| = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}| \cdot |\vec{n}|}{\vec{n}^2} = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

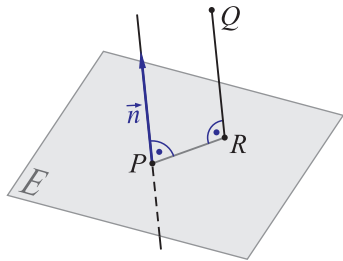
- ▶ Wie würde man den Abstand eines Punktes von einer Ebene messen?
- ▶ Normalengleichung einer Ebene:

$$E : \vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$$

- ▶ Das Lot von Q auf E schneidet E in einem Punkt R . Damit ist

$$d(Q, E) = |RQ|$$

der gesuchte Abstand.



- ▶ Es gilt $\vec{QR} = \lambda \cdot \vec{n}$, also $d(Q, E) = |QR| = |\lambda \cdot \vec{n}|$.
- ▶ Da R in der Ebene E liegt, gilt

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{PR} = (\vec{PQ} + \lambda \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{PQ} \cdot \vec{n} + \lambda \cdot \vec{n}^2, \text{ also } \lambda = -\frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2}$$

- ▶ Damit folgt für den gesuchten Abstand:

$$d(Q, E) = |QR| = |\lambda \cdot \vec{n}| = |\lambda| \cdot |\vec{n}| = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}| \cdot |\vec{n}|}{\vec{n}^2} = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

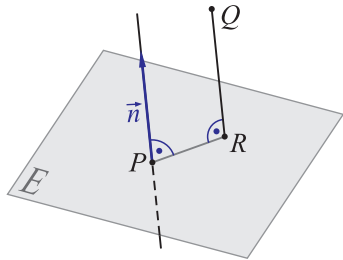
- ▶ Wie würde man den Abstand eines Punktes von einer Ebene messen?
- ▶ Normalengleichung einer Ebene:

$$E : \vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$$

- ▶ Das Lot von Q auf E schneidet E in einem Punkt R . Damit ist

$$d(Q, E) = |RQ|$$

der gesuchte Abstand.



- ▶ Es gilt $\vec{QR} = \lambda \cdot \vec{n}$, also $d(Q, E) = |QR| = |\lambda \cdot \vec{n}|$.
- ▶ Da R in der Ebene E liegt, gilt

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{PR} = (\vec{PQ} + \lambda \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{PQ} \cdot \vec{n} + \lambda \cdot \vec{n}^2, \text{ also } \lambda = -\frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2}$$

- ▶ Damit folgt für den gesuchten Abstand:

$$d(Q, E) = |QR| = |\lambda \cdot \vec{n}| = |\lambda| \cdot |\vec{n}| = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}| \cdot |\vec{n}|}{\vec{n}^2} = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Hesse'sche Normalform

Abstand eines Punktes von einer Ebene:

$$d(Q, E) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Hesse'sche Normalform der Ebenengleichung

- ▶ Besonders einfach wird die Formel für den Abstand eines Punktes von einer Ebene, mit einem **Einheitsvektor** als Normalenvektor, d. h. $|\vec{n}| = 1$: **Normaleneinheitsvektor**.
- ▶ Damit heißt die Normalengleichung

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Ebenengleichung in Hesse'scher Normalform.

- ▶ Die Abstandsformel vereinfacht sich damit zu

$$d(Q, E) = |\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|$$

- ▶ In der Hesse'schen Normalform muss man also nur die Koordinaten von Q in die Gleichung einsetzen und erhält (eventuell bis auf das Vorzeichen) den Abstand $d(Q, E)$.

Abstand eines Punktes von einer Ebene:

$$d(Q, E) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Hesse'sche Normalform der Ebenengleichung

- ▶ Besonders einfach wird die Formel für den Abstand eines Punktes von einer Ebene, mit einem **Einheitsvektor** als Normalenvektor, d. h. $|\vec{n}| = 1$: **Normaleneinheitsvektor**.

- ▶ Damit heißt die Normalengleichung

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Ebenengleichung in Hesse'scher Normalform.

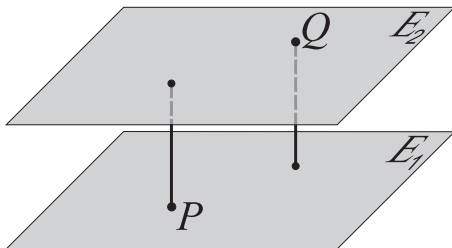
- ▶ Die Abstandsformel vereinfacht sich damit zu

$$d(Q, E) = |\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|$$

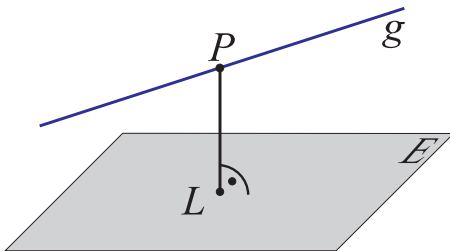
- ▶ In der Hesse'schen Normalform muss man also nur die Koordinaten von Q in die Gleichung einsetzen und erhält (eventuell bis auf das Vorzeichen) den Abstand $d(Q, E)$.

Weitere Abstandsberechnungen im Raum lassen sich mithilfe anschaulich-geometrischer Überlegungen auf Abstände von Punkten zu Ebenen zurückführen.

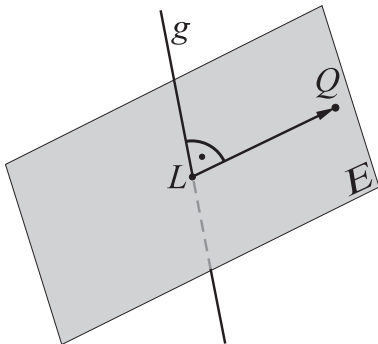
Abstand zweier paralleler Ebenen



Abstand einer Geraden von einer parallelen Ebene

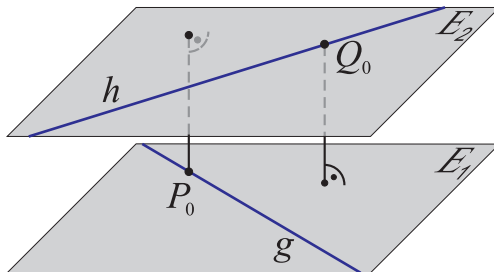


Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum



- ▶ Abstand $d(Q, g)$ eines Punktes Q von einer Geraden g :
Länge $|QL|$ des Lotes von Q auf g
- ▶ Um den Fußpunkt L des Lotes von Q auf g zu bestimmen, ermittelt man die Gleichung derjenigen Ebene E , die Q enthält sowie zu g senkrecht ist.

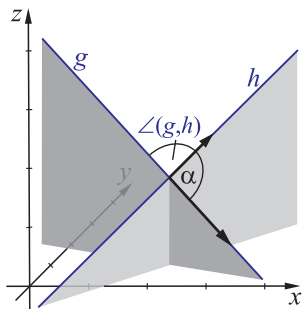
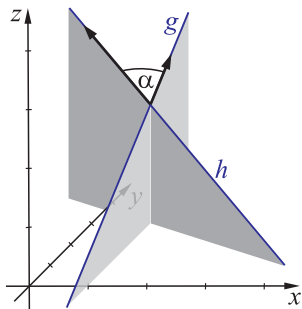
Abstand zweier windschiefer Geraden



Winkelberechnungen

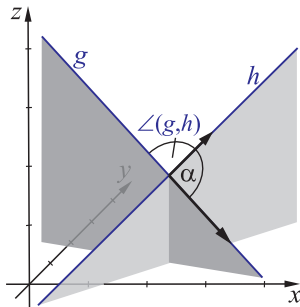
Winkel zweier sich schneidender Geraden in der Ebene oder im Raum

Zwei sich schneidende Geraden g und h schließen zwei Winkel miteinander ein, die sich zu 180° ergänzen. Derjenige dieser beiden Winkel, der nicht größer als 90° ist, heißt **Schnittwinkel der Geraden** g und h .



Winkelberechnungen

Winkel zweier sich schneidender Geraden in der Ebene oder im Raum



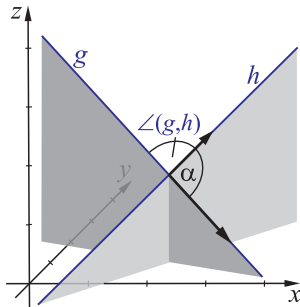
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2 \\ 3,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1,25 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0,75 \\ 1 \\ 0,75 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{1,25 \cdot 0,75 - 0,5 \cdot 1 - 1 \cdot 0,75}{\sqrt{1,25^2 + 0,5^2 + 1} \cdot \sqrt{0,75^2 + 1 + 0,75^2}} \approx -0,1278 \Rightarrow \alpha \approx 97,3^\circ$$

$$\angle(g, h) \approx 180^\circ - 97,3^\circ = 82,7^\circ.$$

Winkelberechnungen

Winkel zweier sich schneidender Geraden in der Ebene oder im Raum

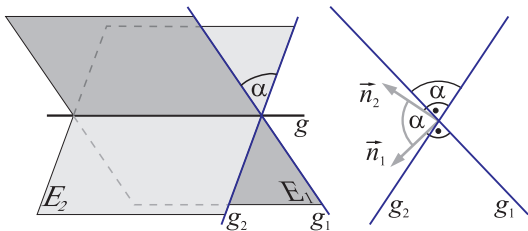


Alternative: Absolutbetrag des Skalarproduktes für die Berechnung nutzen:

Für den Schnittwinkel $\angle(g, h)$ zweier sich schneidender Geraden $g: X = P_1 + t\vec{a}$ und $h: X = P_2 + s\vec{b}$ gilt:

$$\cos \angle(g, h) = \left| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Schnittwinkel zweier Ebenen

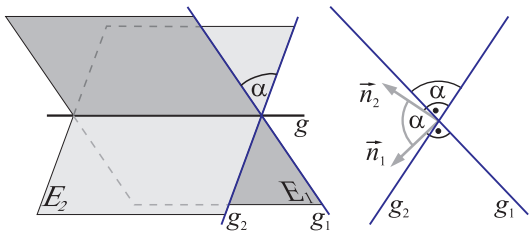


Schnittwinkel zweier Ebenen E_1 und E_2 mit der Schnittgeraden g :
Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden g_1 und g_2 , die in E_1
bzw. E_2 liegen und auf der Schnittgeraden g senkrecht stehen

Für den Schnittwinkel α zweier sich schneidender Ebenen E_1 und E_2
mit den Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 gilt:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Schnittwinkel zweier Ebenen



Schnittwinkel zweier Ebenen E_1 und E_2 mit der Schnittgeraden g :
Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden g_1 und g_2 , die in E_1 bzw. E_2 liegen und auf der Schnittgeraden g senkrecht stehen

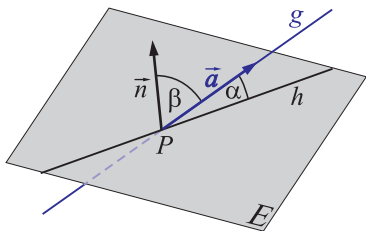
Für den Schnittwinkel α zweier sich schneidender Ebenen E_1 und E_2 mit den Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 gilt:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Winkelberechnungen

Schnittwinkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene E :

Winkel α zwischen g und derjenigen Geraden h in der Ebene E , die von allen in E liegenden Geraden den kleinsten Winkel mit g einschließt



α ergänzt sich mit dem Winkel β zwischen g und einer zu E senkrechten Geraden zu 90° .

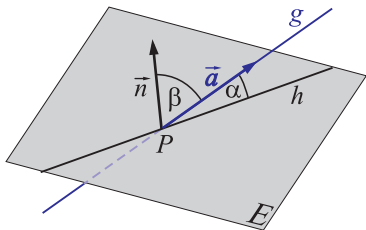
Falls eine Gerade g mit dem Richtungsvektor \vec{a} eine Ebene E mit dem Normalenvektor \vec{n} schneidet, so gilt für den Winkel α zwischen g und E :

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}.$$

Winkelberechnungen

Schnittwinkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene E :

Winkel α zwischen g und derjenigen Geraden h in der Ebene E , die von allen in E liegenden Geraden den kleinsten Winkel mit g einschließt



α ergänzt sich mit dem Winkel β zwischen g und einer zu E senkrechten Geraden zu 90° .

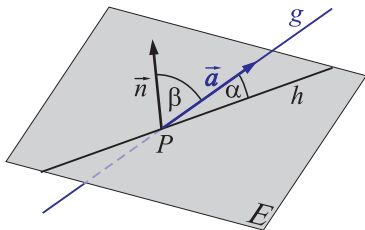
Falls eine Gerade g mit dem Richtungsvektor \vec{a} eine Ebene E mit dem Normalenvektor \vec{n} schneidet, so gilt für den Winkel α zwischen g und E :

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}.$$

Winkelberechnungen

Schnittwinkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene E :

Winkel α zwischen g und derjenigen Geraden h in der Ebene E , die von allen in E liegenden Geraden den kleinsten Winkel mit g einschließt



α ergänzt sich mit dem Winkel β zwischen g und einer zu E senkrechten Geraden zu 90° .

Falls eine Gerade g mit dem Richtungsvektor \vec{a} eine Ebene E mit dem Normalenvektor \vec{n} schneidet, so gilt für den Winkel α zwischen g und E :

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}.$$