Didaktik der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

Andreas Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik

Deutsche Bildungsdirektion Südtirol

Bozen, 22.-23.03.2018

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Grundvorstellungen und Strategien hinsichtlich folgender fundamentaler Ideen sind grundlegend für die Analytische Geometrie (sowohl mit Koordinaten als auch mit Vektoren):

1. Beschreibung von Punkten (im Sinne räumlicher Positionen) durch Koordinaten, verbunden mit „koordinatengebundener Anschauung“
2. Beschreibung geometrischer Objekte durch Gleichungen; Verständnis von Gleichungen als Bedingungen, denen jeweils Teilmengen aller Punkte des Raumes genügen; Transfer zwischen Gleichungen als algebraisch formulierten Bedingungen und der geometrischen Interpretation ihrer Lösungsmengen
3. Geometrisches und elementares algebraisches Verständnis für Schnittmengen von Objekten als Grundlage geometrischer Anwendungen der Linearen Algebra, intuitives „Dimensionsverständnis“
4. Wahl situationsadäquater Koordinatensysteme als Strategie zum Lösen geometrischer Probleme
5. Analogiebetrachtungen zwischen ebenen und räumlichen geometrischen Objekten und Sachverhalten, Rückführung räumlicher auf ebene Probleme, Betrachtungen von Schnittfiguren

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Grundvorstellungen und Strategien hinsichtlich folgender fundamentaler Ideen sind grundlegend für die Analytische Geometrie (sowohl mit Koordinaten als auch mit Vektoren):

1. Beschreibung von Punkten (im Sinne räumlicher Positionen) durch Koordinaten, verbunden mit „koordinatengebundener Anschauung“
2. Beschreibung geometrischer Objekte durch Gleichungen; Verständnis von Gleichungen als Bedingungen, denen jeweils Teilmengen aller Punkte des Raumes genügen; Transfer zwischen Gleichungen als algebraisch formulierten Bedingungen und der geometrischen Interpretation ihrer Lösungsmengen
3. Geometrisches und elementares algebraisches Verständnis für Schnittmengen von Objekten als Grundlage geometrischer Anwendungen der Linearen Algebra, intuitives „Dimensionsverständnis“
4. Wahl situationsadäquater Koordinatensysteme als Strategie zum Lösen geometrischer Probleme
5. Analogiebetrachtungen zwischen ebenen und räumlichen geometrischen Objekten und Sachverhalten, Rückführung räumlicher auf ebene Probleme, Betrachtungen von Schnittfiguren

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Grundvorstellungen und Strategien hinsichtlich folgender fundamentaler Ideen sind grundlegend für die Analytische Geometrie (sowohl mit Koordinaten als auch mit Vektoren):

1. Beschreibung von Punkten (im Sinne räumlicher Positionen) durch Koordinaten, verbunden mit „koordinatengebundener Anschauung“
2. Beschreibung geometrischer Objekte durch Gleichungen; Verständnis von Gleichungen als Bedingungen, denen jeweils Teilmengen aller Punkte des Raumes genügen; Transfer zwischen Gleichungen als algebraisch formulierten Bedingungen und der geometrischen Interpretation ihrer Lösungsmengen
3. Geometrisches und elementares algebraisches Verständnis für Schnittmengen von Objekten als Grundlage geometrischer Anwendungen der Linearen Algebra, intuitives „Dimensionsverständnis“
4. Wahl situationsadäquater Koordinatensysteme als Strategie zum Lösen geometrischer Probleme
5. Analogiebetrachtungen zwischen ebenen und räumlichen geometrischen Objekten und Sachverhalten, Rückführung räumlicher auf ebene Probleme, Betrachtungen von Schnittfiguren

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Grundvorstellungen und Strategien hinsichtlich folgender fundamentaler Ideen sind grundlegend für die Analytische Geometrie (sowohl mit Koordinaten als auch mit Vektoren):

1. Beschreibung von Punkten (im Sinne räumlicher Positionen) durch Koordinaten, verbunden mit „koordinatengebundener Anschauung“
2. Beschreibung geometrischer Objekte durch Gleichungen; Verständnis von Gleichungen als Bedingungen, denen jeweils Teilmengen aller Punkte des Raumes genügen; Transfer zwischen Gleichungen als algebraisch formulierten Bedingungen und der geometrischen Interpretation ihrer Lösungsmengen
3. Geometrisches und elementares algebraisches Verständnis für Schnittmengen von Objekten als Grundlage geometrischer Anwendungen der Linearen Algebra, intuitives „Dimensionsverständnis“
4. Wahl situationsadäquater Koordinatensysteme als Strategie zum Lösen geometrischer Probleme
5. Analogiebetrachtungen zwischen ebenen und räumlichen geometrischen Objekten und Sachverhalten, Rückführung räumlicher auf ebene Probleme, Betrachtungen von Schnittfiguren

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Grundvorstellungen und Strategien hinsichtlich folgender fundamentaler Ideen sind grundlegend für die Analytische Geometrie (sowohl mit Koordinaten als auch mit Vektoren):

1. Beschreibung von Punkten (im Sinne räumlicher Positionen) durch Koordinaten, verbunden mit „koordinatengebundener Anschauung“
2. Beschreibung geometrischer Objekte durch Gleichungen; Verständnis von Gleichungen als Bedingungen, denen jeweils Teilmengen aller Punkte des Raumes genügen; Transfer zwischen Gleichungen als algebraisch formulierten Bedingungen und der geometrischen Interpretation ihrer Lösungsmengen
3. Geometrisches und elementares algebraisches Verständnis für Schnittmengen von Objekten als Grundlage geometrischer Anwendungen der Linearen Algebra, intuitives „Dimensionsverständnis“
4. Wahl situationsadäquater Koordinatensysteme als Strategie zum Lösen geometrischer Probleme
5. Analogiebetrachtungen zwischen ebenen und räumlichen geometrischen Objekten und Sachverhalten, Rückführung räumlicher auf ebene Probleme, Betrachtungen von Schnittfiguren

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Grundvorstellungen und Strategien hinsichtlich folgender fundamentaler Ideen sind grundlegend für die Analytische Geometrie (sowohl mit Koordinaten als auch mit Vektoren):

1. Beschreibung von Punkten (im Sinne räumlicher Positionen) durch Koordinaten, verbunden mit „koordinatengebundener Anschauung“
2. Beschreibung geometrischer Objekte durch Gleichungen; Verständnis von Gleichungen als Bedingungen, denen jeweils Teilmengen aller Punkte des Raumes genügen; Transfer zwischen Gleichungen als algebraisch formulierten Bedingungen und der geometrischen Interpretation ihrer Lösungsmengen
3. Geometrisches und elementares algebraisches Verständnis für Schnittmengen von Objekten als Grundlage geometrischer Anwendungen der Linearen Algebra, intuitives „Dimensionsverständnis“
4. Wahl situationsadäquater Koordinatensysteme als Strategie zum Lösen geometrischer Probleme
5. Analogiebetrachtungen zwischen ebenen und räumlichen geometrischen Objekten und Sachverhalten, Rückführung räumlicher auf ebene Probleme, Betrachtungen von Schnittfiguren

Grundvorstellungen und fundamentale Ideen hinsichtlich des Vektorbegriffs und die Nutzung von Vektoren in der Geometrie:

6. Vektoren als abstrahierende Objekte, die verschiedene Sachverhalte beschreiben und miteinander in Verbindung bringen; Verbindung und Transfer zwischen arithmetisch-algebraischen und geometrischen Repräsentationsmodi von Vektoren; Gemeinsamkeiten von Zahlen und Vektoren; Rechengesetze als Grundlage eines (ansatzweisen) strukturellen Verständnisses von Vektorräumen
7. Vereinfachung von Darstellungen und Berechnungen in der Geometrie durch die Verwendung von Vektoren; Vektorrechnung als geometrische Operationen beschreibender Kalkül; Linearkombinationen als Grundlage problemangemessener Koordinatisierungen; Grundverständnis des Begriffs der Basis

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Grundvorstellungen und fundamentale Ideen hinsichtlich des Vektorbegriffs und die Nutzung von Vektoren in der Geometrie:

6. Vektoren als abstrahierende Objekte, die verschiedene Sachverhalte beschreiben und miteinander in Verbindung bringen; Verbindung und Transfer zwischen arithmetisch-algebraischen und geometrischen Repräsentationsmodi von Vektoren; Gemeinsamkeiten von Zahlen und Vektoren; Rechengesetze als Grundlage eines (ansatzweisen) strukturellen Verständnisses von Vektorräumen

7. Vereinfachung von Darstellungen und Berechnungen in der Geometrie durch die Verwendung von Vektoren; Vektorrechnung als geometrische Operationen beschreibender Kalkül; Linearkombinationen als Grundlage problemangemessener Koordinatisierungen; Grundverständnis des Begriffs der Basis

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Grundvorstellungen und fundamentale Ideen hinsichtlich des Vektorbegriffs und die Nutzung von Vektoren in der Geometrie:

6. Vektoren als abstrahierende Objekte, die verschiedene Sachverhalte beschreiben und miteinander in Verbindung bringen; Verbindung und Transfer zwischen arithmetisch-algebraischen und geometrischen Repräsentationsmodi von Vektoren; Gemeinsamkeiten von Zahlen und Vektoren; Rechengesetze als Grundlage eines (ansatzweisen) strukturellen Verständnisses von Vektorräumen

7. Vereinfachung von Darstellungen und Berechnungen in der Geometrie durch die Verwendung von Vektoren; Vektorrechnung als geometrische Operationen beschreibender Kalkül; Linearkombinationen als Grundlage problemangemessener Koordinatisierungen; Grundverständnis des Begriffs der Basis

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Fundamentale Ideen bezüglich Parameterdarstellungen – Bindeglied zwischen den Leitideen „Raum und Form“ sowie „funktionaler Zusammenhang“:

8. Vektorielle Parameterdarstellungen von Geraden und Ebenen als Beschreibungen dieser Gebilde durch Punkte und „Ausdehnungsrichtungen“
9. Geraden und Ebenen (sowie Kurven und Flächen) als Punktmengen; Parameterdarstellungen als Funktionen der Koordinaten von Punkten des Raumes in Abhängigkeit von reellen Zahlen; kinematische Vorstellungen von durch Parameterdarstellungen beschriebenen Kurven als Bewegungsbahnen

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Fundamentale Ideen bezüglich Parameterdarstellungen – Bindeglied zwischen den Leitideen „Raum und Form“ sowie „funktionaler Zusammenhang“:

8. Vektorielle Parameterdarstellungen von Geraden und Ebenen als Beschreibungen dieser Gebilde durch Punkte und „Ausdehnungsrichtungen“

9. Geraden und Ebenen (sowie Kurven und Flächen) als Punktmengen; Parameterdarstellungen als Funktionen der Koordinaten von Punkten des Raumes in Abhängigkeit von reellen Zahlen; kinematische Vorstellungen von durch Parameterdarstellungen beschriebenen Kurven als Bewegungsbahnen

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Fundamentale Ideen bezüglich Parameterdarstellungen – Bindeglied zwischen den Leitideen „Raum und Form“ sowie „funktionaler Zusammenhang“:

8. Vektorielle Parameterdarstellungen von Geraden und Ebenen als Beschreibungen dieser Gebilde durch Punkte und „Ausdehnungsrichtungen“
9. Geraden und Ebenen (sowie Kurven und Flächen) als Punktmengen; Parameterdarstellungen als Funktionen der Koordinaten von Punkten des Raumes in Abhängigkeit von reellen Zahlen; kinematische Vorstellungen von durch Parameterdarstellungen beschriebenen Kurven als Bewegungsbahnen

Fundamentale Ideen der metrischen Geometrie des Raumes – Bindeglied zwischen den Leitideen Leitideen „Raum und Form“ sowie „Messen“:

10. Skalarprodukt als Grundlage einer Metrik des Anschauungsraumes im Sinne einer analytischen Beschreibung von Längen- und Winkelmessungen

11. Metrische Beziehungen als Grundlage der Beschreibung geometrischer Objekte (z. B. von Kreisen und Kugeln durch Abstände sowie von Geraden und Ebenen durch Normalengleichungen)

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Fundamentale Ideen der metrischen Geometrie des Raumes – Bindeglied zwischen den Leitideen Leitideen „Raum und Form“ sowie „Messen“:

10. Skalarprodukt als Grundlage einer Metrik des Anschauungsraumes im Sinne einer analytischen Beschreibung von Längen- und Winkelmessungen

11. Metrische Beziehungen als Grundlage der Beschreibung geometrischer Objekte (z. B. von Kreisen und Kugeln durch Abstände sowie von Geraden und Ebenen durch Normalengleichungen)

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Fundamentale Ideen der metrischen Geometrie des Raumes – Bindeglied zwischen den Leitideen Leitideen „Raum und Form“ sowie „Messen“:

10. Skalarprodukt als Grundlage einer Metrik des Anschauungsraumes im Sinne einer analytischen Beschreibung von Längen- und Winkelmessungen

11. Metrische Beziehungen als Grundlage der Beschreibung geometrischer Objekte (z. B. von Kreisen und Kugeln durch Abstände sowie von Geraden und Ebenen durch Normalengleichungen)

Nicht obligatorisch, aber im Sinne eines stimmigen „Gesamtbildes von Geometrie“ und des Anschlusses an abbildungsgeometrische Inhalte des Mathematikunterrichts der S I wünschenswert ist die Berücksichtigung der folgenden fundamentalen Ideen:

12. Geometrische Abbildungen als Hilfsmittel zum Erkennen und Beschreiben von Beziehungen zwischen geometrischen Objekten; Invarianten von Abbildungen als deren kennzeichnende geometrische Merkmale

13. Transfer zwischen geometrischen und algebraischen Operationen mittels matrizieller Beschreibung geometrischer Abbildungen

Fundamentale Idee, die auch nichtgeometrische Aspekte des Unterrichts in Linearer Algebra umfasst:

14. Vektoren und Matrizen als universelle Mathematisierungsmuster geometrischer und nichtgeometrischer Anwendungen der Mathematik

Themen

1. Vektorbegriff und Vektorrechnung
2. Parameterdarstellungen (auch nichtlinear), speziell: Zykloiden
3. Skalarprodukt, metrische Geometrie von Geraden und Ebenen
4. Modellierung: Verfolgungsprobleme: Eine Abituraufgabe und ihre Lösung(en)
5. Problemlösen: Vergleiche elementargeometrischer und analytisch-geometrischer Lösungsstrategien (Schwerpunkte, „Schatzinselproblem“)
6. Modellierung/Anwendungen: Beziérkurven – von geometrischen Konstruktionen zu analytischen Beschreibungen
7. Modellierung/Anwendungen: Räumliche Koordinatengeometrie; 3D-Computergrafik als Anwendung der analytischen Geometrie
8. CAS-Nutzung in der Linearen Algebra/ Analytischen Geometrie (mit Einführung in das freie CAS Maxima)