# Zykloiden

*Welche Kurve beschreibt ein Fahrradventil, wenn das zugehörige Fahrrad fährt?*

Wir gehen zunächst von der einfachsten Situation aus, dass der rotierende Punkt auf dem Abrollkreis liegt, was nicht ganz der Situation bei dem Fahrradventil entspricht.

### Erzeugung der Zykloide als Ortslinie

Ausgangspunkt der Modellierung der Rollkurve ist die Synchronizität der Translation des Radmittelpunktes und der Drehung des Rades. Während einer vollen Umdrehung des Rades muss es sich um einen Radumfang (also $2\pi r$, falls $r$ der Radius des Rades ist) entlang „der Straße“ bewegen. Zwischen dem zurückgelegten Weg $t$ und dem Drehwinkel $\phi$ (im Bogenmaß) besteht damit die Beziehung $\phi(t) = \frac{t}{r}$. Wir betrachten im Folgenden den Einheitskreis, setzen also $r = 1$.

- Erzeugen Sie zunächst ein Rad. Sie können dafür einen Kreis benutzen, leider sieht man diesem aber nicht an, wenn er um seinen eigenen Mittelpunkt gedreht wird. Schöner ist es, z. B. ein „zahnradähnliches“ Gebilde zu drehen, dass Sie z. B. mittels
  ```
  Kurve[(0.98+0.02*cos(50*2*π*t))*cos(2π*t),1+(0.98+0.02*cos(50*2*π*t))*sin(2π*t),t,0,1]
  ```
  erzeugen können (mit 50 „Zähnen“, Außenradius 1, Zahntiefe 0,04 und dem Mittelpunkt (0|1)). Geben Sie dem „Zahnrad“ einen Namen, z. B. **ZR**.

- Erzeugen Sie einen Schieberegler, geben Sie ihm den Namen $s$. Legen Sie den Bereich auf $[0; 1]$ fest und wählen Sie eine kleine Schrittweite (z. B. 0,01). Wenn Sie später evtl. mehrere Umdrehungen betrachten wollen, können Sie einfach die Grenzen des Parameterintervalls (also des Schiebereglers) verändern.
- Erzeugen Sie außerdem einen Punkt $A$ im Koordinatenursprung.
- Sowohl das „Rad“ als auch der bewegliche Punkt $A$ werden nun um den Mittelpunkt des Rades *gedreht*, in GeoGebra gibt man dazu jeweils ein:

  **Drehe[<*Objekt*>,<*Drehwinkel*>,<*Drehzentrum*>]**

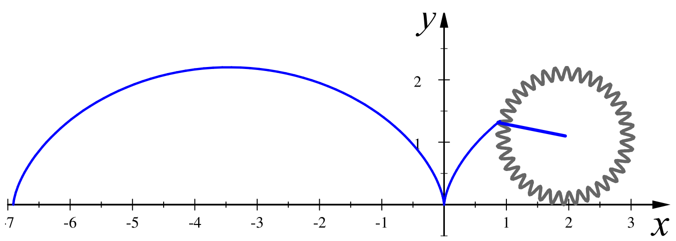
  Welchen Drehwinkel (im Bogenmaß) müssen Sie verwenden, um eine Drehung in Abhängigkeit von dem Parameter $s$ zu erreichen (wobei innerhalb des Intervalls $[0; 1]$ eine vollständige Umdrehung erfolgen soll)? Experimentieren Sie gegebenenfalls.

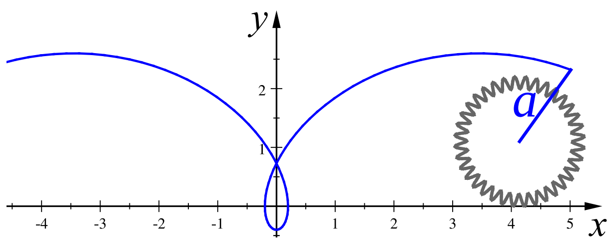
- Durch die Drehungen von **A** und **ZR** werden Bildobjekte von **A**′ und **ZR**′ erzeugt (sinnvoll ist es, jetzt **A** und **ZR** auszublenden). Die Bildobjekte werden jetzt (wiederum in Abhängigkeit von $s$) verschoben, die entsprechende Eingabe in GeoGebra ist:

  **Verschiebe[<*Objekt*>, <*Verschiebungsvektor*>]**

  Überlegen Sie, welchen Verschiebungsvektor Sie verwenden müssen, um in Kombination mit der Drehung die gewünschte Rollbewegung zu erzeugen.

- Erzeugen Sie die Ortslinie des gedrehten und verschobenen Punktes **A**′′ (in Abhängigkeit von $s$).




Eine Verallgemeinerung, mithilfe derer sich auch die Bahnkurve eines Fahrradventils genauer modellieren lässt, besteht darin, den beweglichen Punkt nicht auf dem sich drehenden Kreis selbst anzubringen (also mit dem Abstand $r$ vom Mittelpunkt), sondern mit einem beliebigen Abstand $a$ vom Mittelpunkt.

**Parametrisierung der Zykloide**

Wählt man ein Koordinatensystem so, dass die $x$-Achse der Straße entspricht, ergibt sich die Parameterdarstellung der Rollkurve als Kombination der linearen Bewegung des Radmittelpunktes $M$ und der Rotation. Nach dieser Erkenntnis schlugen Schüler die folgende Parametrisierung der Rollkurve vor:

$$x(t) \quad = \quad x_{\mathrm{m}} + r\cos\left(\frac{t}{r}\right) = t + r\cos\left(\frac{t}{r}\right); \qquad y(t) \quad = \quad y_{\mathrm{m}} + r\sin\left(\frac{t}{r}\right) = r + r\sin\left(\frac{t}{r}\right).$$

Eine Überprüfung dieser Beschreibung mithilfe des Computers zeigt aber eine Drehung des Punktes („Ventils") entgegen der gewünschten Drehrichtung.

Überlegen Sie, welche Parametrisierung gewählt werden muss, damit die oben modellierte Zykloide tatsächlich beschrieben wird. Denken Sie über die Drehrichtung und auch über die Lage des beweglichen Punktes im Ausgangszustand ($t = 0$) nach.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die durch Ihre Parametrisierung beschriebene Kurve in GeoGebra mittels **`Kurve[x(t), y(t), t, 0, 1]`** darstellen.

(Schauen Sie erst zur Kontrolle nach unten.)

---

Ein Überdenken der Situation führt zu der Erkenntnis, dass sich der Punkt bei einer nach rechts gerichteten Rollbewegung im Uhrzeigersinn bewegen muss, vor den Kosinus also ein negatives Vorzeichen zu setzen ist. Soll die Bewegung des Punktes außerdem im Koordinatenursprung beginnen, so ist eine „Phasenverschiebung" von $-\frac{\pi}{2}$ notwendig. Aus diesen Überlegungen heraus ergibt sich die Parameterdarstellung

$$x(t) \quad = \quad t - r\cos\left(\frac{t}{r} - \frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad x(t) \quad = \quad t - r\sin\left(\frac{t}{r}\right)$$
$$\text{bzw.}$$
$$y(t) \quad = \quad r + r\sin\left(\frac{t}{r} - \frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad y(t) \quad = \quad r - r\cos\left(\frac{t}{r}\right)$$

Eine Verallgemeinerung, mithilfe derer sich dann auch die Bahnkurve eines Fahrradventils genauer modellieren lässt, besteht darin, den beweglichen Punkt nicht auf dem sich drehenden Kreis selbst anzubringen (also mit dem Abstand $r$ vom Mittelpunkt), sondern mit einem beliebigen Abstand $a$ vom Mittelpunkt. Die obige Parameterdarstellung muss dazu nur geringfügig modifiziert werden:

$$x(t) \quad = \quad t - a\sin\left(\frac{t}{r}\right)$$
$$y(t) \quad = \quad r - a\cos\left(\frac{t}{r}\right)$$