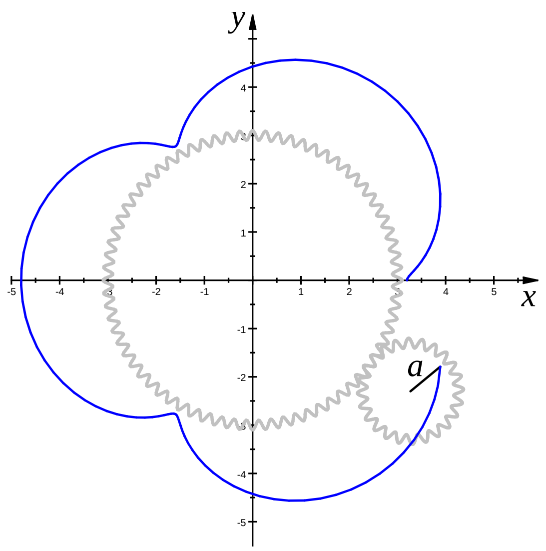
Epi- und Hypozykloiden

Rollt ein Kreis außerhalb eines (festen) Kreises ab, so beschreibt ein Punkt des Kreises eine ***Epizykloide***, geschieht das Abrollen innerhalb eines Kreises, so wird die Rollkurve ***Hypozykloide*** genannt. Die Anzahl der für das Erreichen einer geschlossenen Kurve benötigten Umdrehungen hängt vom Verhältnis $\frac{r_1}{r_2}$ der Radien r_1 des festen und r_2 des beweglichen Kreises ab. Man überlegt zunächst, dass dieses Verhältnis ganzzahlig sein muss, damit das bewegliche Rad bei einem einzigen Umlauf um das feste Rad eine geschlossene Kurve erzeugt.

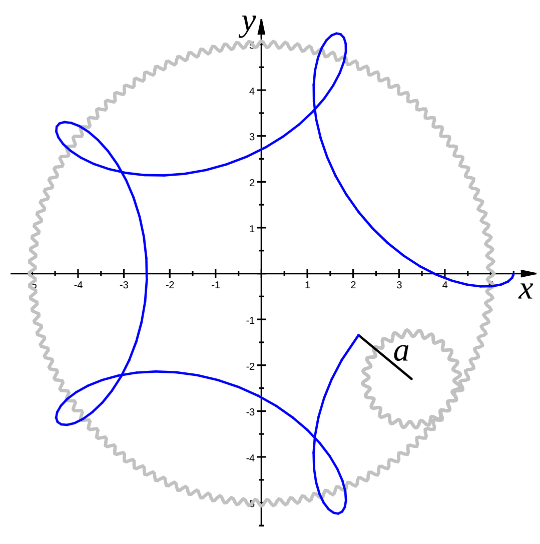
1. Wie viele Umdrehungen muss das bewegliche Rad in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{r_1}{r_2}$ der Radien
   a) bei der Epizykloide
   b) bei der Hypozykloide

   vollführen, um eine vollständige Umdrehung um das große Rad zurückzulegen? Verwenden Sie ggf. einen Spirographen, um sich zu vergewissern.
2. Erzeugen Sie Epi- und Hypozkloiden als Ortslinien in GeoGebra. Orientieren Sie sich an der Vorgehensweise bei der Erzeugung „normaler“ Zykloiden.
3. Stellen Sie Parametergleichungen für Epi- und Hypozkloiden auf.

Epizykloide



Hypozykloide



Drehen Sie das Blatt nur zur Kontrolle um.

1. Zu beachten ist dabei, dass der bewegliche Kreis durch die Drehung um den festen Kreis eine zusätzliche Umdrehung (bei der Epizykloide) vollführt und bei der Hypozykloide eine Umdrehung abzuziehen ist. Somit sind für eine Drehung um den festen Kreis $\frac{r_1}{r_2} + 1$ bzw. $\frac{r_1}{r_2} - 1$ Drehungen des beweglichen Kreises auszuführen.

3. Unter Berücksichtigung dieser Überlegungen erhält man durch Addition der beiden Kreisbewegungen die folgenden Parameterdarstellungen.

   Epizykloide:

$$\begin{aligned} x(t) &= (r_1 + r_2) \cdot \cos(t) + a \cdot \cos\left(t \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)\right) \\ y(t) &= (r_1 + r_2) \cdot \sin(t) + a \cdot \sin\left(t \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)\right) \end{aligned}$$

   Hypozykloide:

$$\begin{aligned} x(t) &= (r_1 - r_2) \cdot \cos(t) + a \cdot \cos\left(t \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right)\right) \\ y(t) &= (r_1 - r_2) \cdot \sin(t) + a \cdot \sin\left(t \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right)\right) \end{aligned}$$