## Didaktik der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

# Vektorbegriff und Vektorrechnung

Andreas Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik

Deutsches Bildungsdirektion Südtirol

Bozen, 22.-23.03.2018

## Zugänge zum Vektorbegriff

- Geometrische Zugänge (Pfeilklassen)
- Arithmetische Zugänge ($n$-Tupel)
- Rechengesetze – Vektorraumaxiome

## Erste Anwendungen von Vektoren in der Geometrie

## Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

## Zugänge zum Vektorbegriff

Geometrische Zugänge (Pfeilklassen)
Arithmetische Zugänge ($n$-Tupel)
Rechengesetze – Vektorraumaxiome

## Erste Anwendungen von Vektoren in der Geometrie

## Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

# Zugänge zum Vektorbegriff

Modi des Verständnisses und der Beschreibung von Konzepten der Linearen Algebra:[1]

- Synthetisch-geometrischer Modus (Sprache der Geometrie)
- Arithmetischer Modus (Sprache der Arithmetik)
- Algebraisch-struktureller Modus (Sprache der Algebra)

Konkretisiert für den Vektorbegriff:

- Geometrische Auffassung von Vektoren als Klassen gleich langer, paralleler und gleich gerichteter Pfeile: Pfeilklassenauffassung
- Arithmetische Auffassung von Vektoren als $n$-Tupel (speziell Paare und Tripel) reeller Zahlen: $n$-Tupel-Auffassung
- Auffassung von Vektoren als Elemente eines (axiomatisch begründeten) Vektorraumes: Vektorraumauffassung

[1] Modes of description and language of linear algebra concepts, vgl. u. a. Hillel (2000), Sierpinska (1997, 1998, 2000)

# Zugänge zum Vektorbegriff

Modi des Verständnisses und der Beschreibung von Konzepten der Linearen Algebra:[1]

- Synthetisch-geometrischer Modus (Sprache der Geometrie)
- Arithmetischer Modus (Sprache der Arithmetik)
- Algebraisch-struktureller Modus (Sprache der Algebra)

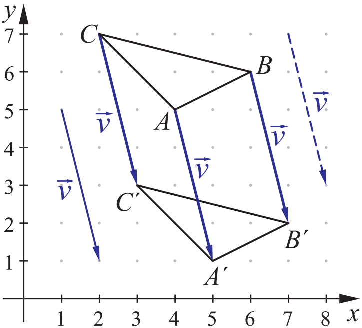
Konkretisiert für den Vektorbegriff:

- Geometrische Auffassung von Vektoren als Klassen gleich langer, paralleler und gleich gerichteter Pfeile: Pfeilklassenauffassung
- Arithmetische Auffassung von Vektoren als $n$-Tupel (speziell Paare und Tripel) reeller Zahlen: $n$-Tupel-Auffassung
- Auffassung von Vektoren als Elemente eines (axiomatisch begründeten) Vektorraumes: Vektorraumauffassung

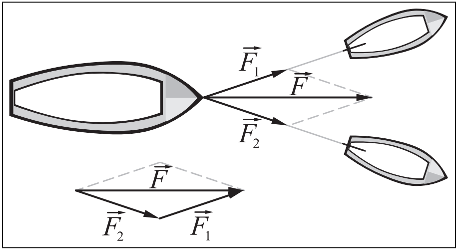
[1] Modes of description and language of linear algebra concepts, vgl. u. a. Hillel (2000), Sierpinska (1997, 1998, 2000)

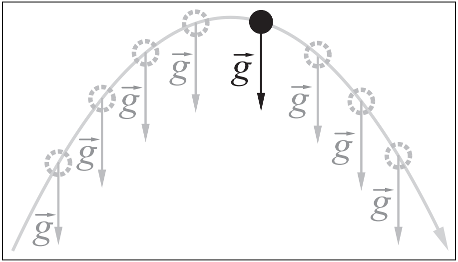
## Verschiebungen

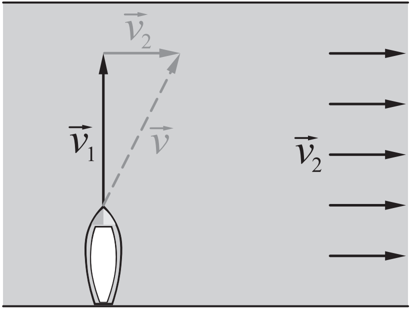
- Warum beschreiben die in der Abbildung dargestellten Pfeile dieselbe Verschiebung?
- Ermittle für jeden der Pfeile die Koordinaten des Anfangs- und des Endpunktes.
- Berechne für jeden Pfeil die Differenzen der $x$- und der $y$-Koordinaten. Was stellst du fest?



## Kräfte und Geschwindigkeiten



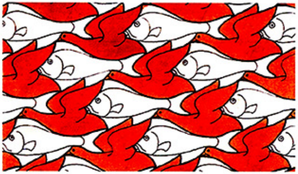



# Pfeilklassenauffassung

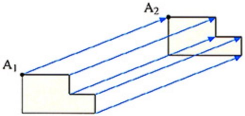
## 2. Vektoren

### A. Vektoren als Pfeilklassen

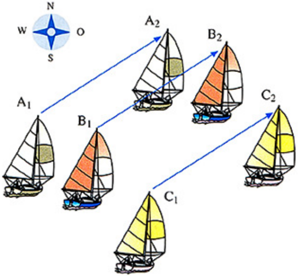
Bei Ornamenten und Parkettierungen entsteht die Regelmäßigkeit oft durch ***Parallelverschiebungen*** einer Figur wie auch bei dem abgebildeten Muster des berühmten Malers *Maurits Cornelis ESCHER* (1898–1972).



Eine Parallelverschiebung kann man durch einen Verschiebungspfeil oder durch einen beliebigen Punkt $A_1$ und dessen Bildpunkt $A_2$ kennzeichnen.




Bei einer Seglerflotte, die innerhalb eines gewissen Zeitraumes unter dem Einfluss des Windes abtreibt, werden alle Schiffe in gleicher Weise verschoben.
Die Verschiebung wird schon durch jeden einzelnen der gleich gerichteten und gleich langen Pfeile $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$ eindeutig festgelegt.




Wir fassen daher alle Pfeile der Ebene (des Raumes), die gleiche Länge und gleiche Richtung haben, zu einer Klasse zusammen. Eine solche Pfeilklasse bezeichnen wir als einen ***Vektor*** in der Ebene (im Raum).

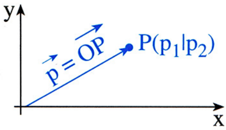
Bigalke/ Köhler (2009)

# Pfeilklassenauffassung

## Probleme mit den Ortsvektoren

**D. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ eines Punktes**

Auch die Lage von Punkten im Koordinatensystem lässt sich vektoriell erfassen. Dazu verwendet man den Pfeil $\overrightarrow{OP}$, der vom Ursprung O des Koordinatensystems auf den gewünschten Punkt P zeigt. Dieser Vektor heißt ***Ortsvektor*** von P. Seine Koordinaten entsprechen exakt den Koordinaten des Punktes P. Man geht in der Ebene und im Raum analog vor.




$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

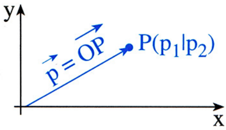
Bigalke/Köhler (2009)

Außerdem (bei der Behandlung der Parameterdarstellungen):
Geraden und Ebenen als *Punkt*mengen

## Probleme mit den Ortsvektoren

**D. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ eines Punktes**

Auch die Lage von Punkten im Koordinatensystem lässt sich vektoriell erfassen. Dazu verwendet man den Pfeil $\overrightarrow{OP}$, der vom Ursprung O des Koordinatensystems auf den gewünschten Punkt P zeigt. Dieser Vektor heißt ***Ortsvektor*** von P. Seine Koordinaten entsprechen exakt den Koordinaten des Punktes P. Man geht in der Ebene und im Raum analog vor.




$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

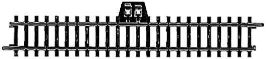
Bigalke/Köhler (2009)

Außerdem (bei der Behandlung der Parameterdarstellungen):
Geraden und Ebenen als *Punkt*mengen

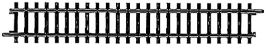
# $n$-Tupel-Auffassung

## Stücklisten als $n$-Tupel

| | Basis-sortiment | Ergänzungs-sortiment 1 | Ergänzungs-sortiment 2 |
|---|---|---|---|
| Gleisstück gerade (168,9 mm) | 3 | 8 | 15 |
| Gleisstück gebogen (45°) | 8 | 4 | 8 |
| Anschluss-Gleisstück | 1 | 0 | 1 |
| Weiche links | 0 | 1 | 2 |
| Weiche rechts | 0 | 1 | 2 |
| Weichenantrieb | 0 | 2 | 4 |



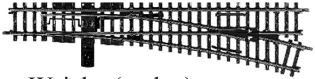
Anschluss-Gleisstück



Gleisstück (gerade)

Gleisstück (gebogen)

Weichenantrieb

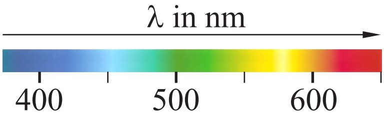


Weiche (rechts)

Weiche (links)

## Das RGB-Modell

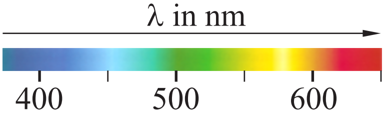
- Sichtbarer Bereich des elektromagnetischen Spektrums: 380-780 nm.
- Tristimulustheorie: Auge besitzt drei Arten von Sensoren (Synapsen) mit unterschiedlicher wellenlängenabhängiger Empfindlichkeit.




- Dies wird beim RGB-Modell genutzt: Jede Farbe wir durch drei Grundfarben (Rot, Grün, Blau) gemischt (addiert).
- Farben werden durch Tripel $\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$ beschrieben.

### Das RGB-Modell

- Sichtbarer Bereich des elektromagnetischen Spektrums: 380-780 nm.
- Tristimulustheorie: Auge besitzt drei Arten von Sensoren (Synapsen) mit unterschiedlicher wellenlängenabhängiger Empfindlichkeit.




- Dies wird beim RGB-Modell genutzt: Jede Farbe wir durch drei Grundfarben (Rot, Grün, Blau) gemischt (addiert).
- Farben werden durch Tripel $\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$ beschrieben.

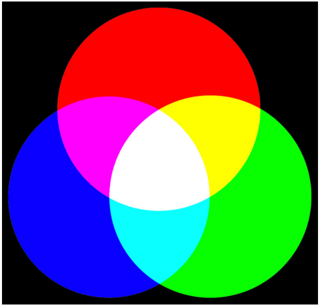
Vektoraddition u. Multiplikation mit Skalaren sind innerhalb des Definitionsbereichs $[0;1]$ der Komponenten sinnvolle Operationen für Farben:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ g_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 \\ g_2 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \min(r_1 + r_2, 1) \\ \min(g_1 + g_2, 1) \\ \min(b_1 + b_2, 1) \end{pmatrix}$$

Beispiele:

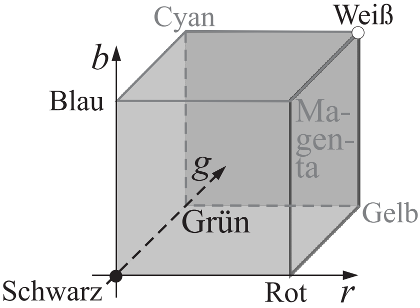
$$\mathrm{R} + \mathrm{G} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{W}$$

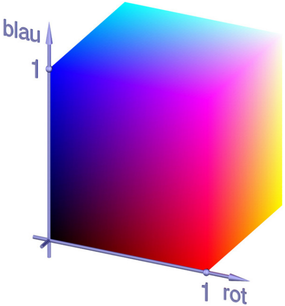
$$\mathrm{R} + \mathrm{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Y}$$



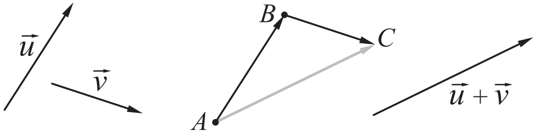
## Der RGB-Würfel

- Menge aller Farb„vektoren“: Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, die als Würfel im Anschauungsraum dargestellt werden kann (Farbwürfel).
- Komplementären Farben entsprechen gegenüberliegende Punkte des Würfels.



Es seien $\vec{u}$, $\vec{v}$ Pfeilklassen sowie $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ und $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$ Pfeile, die diesen Klassen angehören. Als Summe der Pfeilklassen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wird die Pfeilklasse bezeichnet, welche den Pfeil $\overrightarrow{AC}$ als einen Repräsentanten besitzt:




Summe zweier *n*-Tupel $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

(analog für die skalare Multiplikation)

→ Vorbereitung eines strukturellen Verständnis des Vektorbegriffs durch Erkennen der Gemeinsamkeiten von Pfeilklassen und $n$-Tupeln (sowie der Gemeinsamkeiten mit den reellen Zahlen)

Stufen der Herausbildung eines Verständnisses grundlegender Begriffe (nach Vollrath)[2]

1. Stufe: Intuitives Begriffsverständnis
2. Stufe: Inhaltliches Begriffsverständnis
3. Stufe: Integriertes Begriffsverständnis
4. Stufe: Strukturelles Begriffsverständnis
5. Stufe: Formales Begriffsverständnis

[2] Vollrath, H.-J. (1984): Methodik des Begriffslernens im Mathematikunterricht. Klett, Stuttgart, S. 219.

# „Rechnen“ mit Pfeilklassen und $n$-Tupeln

$\rightarrow$ Vorbereitung eines strukturellen Verständnis des Vektorbegriffs durch Erkennen der Gemeinsamkeiten von Pfeilklassen und $n$-Tupeln (sowie der Gemeinsamkeiten mit den reellen Zahlen)

- Koordinatenbeschreibung von Pfeilklassen
- Rechengesetze als Gemeinsamkeiten

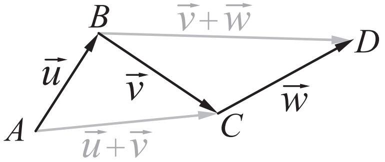
Stufen der Herausbildung eines Verständnisses grundlegender Begriffe (nach Vollrath)[2]

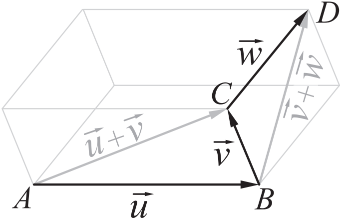
1. Stufe: Intuitives Begriffsverständnis
2. Stufe: Inhaltliches Begriffsverständnis
3. Stufe: Integriertes Begriffsverständnis
4. Stufe: Strukturelles Begriffsverständnis
5. Stufe: Formales Begriffsverständnis

[2] Vollrath, H.-J. (1984): Methodik des Begriffslernens im Mathematikunterricht. Klett, Stuttgart, S. 219.

**Beispiel: Assoziativität der Pfeilklassenaddition**

Für beliebige Pfeilklassen $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gilt $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.




*Beweis*:

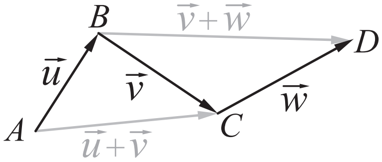
Es sei $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant der Pfeilklasse $\vec{u}$ ($\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$), $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$, $\overrightarrow{CD} \in \vec{w}$.

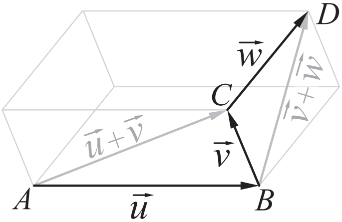
Nach der „geometrischen Definition" der Addition von Pfeilklassen ist dann $\overrightarrow{AC} \in \vec{u}+\vec{v}$ und $\overrightarrow{BD} \in \vec{v}+\vec{w}$.

Die Summe $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ wird durch $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ durch $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ repräsentiert, also gilt $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

**Beispiel: Assoziativität der Pfeilklassenaddition**

Für beliebige Pfeilklassen $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gilt $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.




*Beweis*:

Es sei $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant der Pfeilklasse $\vec{u}$ ($\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$), $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$, $\overrightarrow{CD} \in \vec{w}$.

Nach der „geometrischen Definition" der Addition von Pfeilklassen ist dann $\overrightarrow{AC} \in \vec{u}+\vec{v}$ und $\overrightarrow{BD} \in \vec{v}+\vec{w}$.

Die Summe $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ wird durch $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ durch $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ repräsentiert, also gilt $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} \;=\; \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

**Beispiel: Assoziativität der $n$-Tupel-Addition**

Für beliebige $n$-Tupel $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gilt $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

*Beweis mithilfe des Assoziativgesetzes in den reellen Zahlen*:

$$
\begin{aligned}
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 \\ x_2+y_2+z_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n+z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ y_2+z_2 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right] \\
&= \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) \, .
\end{aligned}
$$

**Beispiel: Assoziativität der $n$-Tupel-Addition**

Für beliebige *n*-Tupel $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gilt $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

*Beweis mithilfe des Assoziativgesetzes in den reellen Zahlen*:

$$
\begin{aligned}
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= \left[\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1\\ x_2+y_2\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1\\ x_2+y_2+z_2\\ \vdots\\ x_n+y_n+z_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1+z_1\\ y_2+z_2\\ \vdots\\ y_n+z_n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\right]\\
&= \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})\,.
\end{aligned}
$$

## Simultane Veranschaulichungen von Rechengesetzen

**für Pfeilklassen und $n$-Tupel**

- Assoziativität der Addition
- Kommutativität der Addition
- 1. Distributivgesetz

Die meisten der Vektorraumaxiome lassen sich derartig als gemeinsame Rechenregeln für Pfeilklassen und $n$-Tupel herausarbeiten bzw. zumindest veranschaulichen.

$\rightarrow$ *Ansätze* strukturellen Begriffsverständnisses

- Vertiefung durch einfache Beweise von Eigenschaften mithilfe der VR-Axiome ist möglich.
- I. Allg. ist nicht zu erwarten, dass Schülerinnen und Schüler vollständig erfassen, dass aus den VR-Axiomen alle relevanten Eigenschaften von Vektoren folgen.

# Rechengesetze als Gemeinsamkeiten

## Simultane Veranschaulichungen von Rechengesetzen
**für Pfeilklassen und $n$-Tupel**

- Assoziativität der Addition
- Kommutativität der Addition
- 1. Distributivgesetz

Die meisten der Vektorraumaxiome lassen sich derartig als gemeinsame Rechenregeln für Pfeilklassen und $n$-Tupel herausarbeiten bzw. zumindest veranschaulichen.

$\rightarrow$ *Ansätze* strukturellen Begriffsverständnisses

- Vertiefung durch einfache Beweise von Eigenschaften mithilfe der VR-Axiome ist möglich.
- I. Allg. ist nicht zu erwarten, dass Schülerinnen und Schüler vollständig erfassen, dass aus den VR-Axiomen alle relevanten Eigenschaften von Vektoren folgen.

**Zugänge zum Vektorbegriff**

Geometrische Zugänge (Pfeilklassen)

Arithmetische Zugänge ($n$-Tupel)

Rechengesetze – Vektorraumaxiome

**Erste Anwendungen von Vektoren in der Geometrie**

**Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten**

# Anwendungen von Vektoren für Beweise geometrischer Sätze

## Anwendung des Pfeilklassenkonzepts

Aus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ folgt stets:

- Die Geraden $AB$ und $CD$ sind parallel (bzw. im Spezialfall identisch).
- Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind gleich lang.
- Da die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ gleich gerichtet sind, sind auch die Geraden $AC$ und $BD$ parallel.

## Satz von Varignon

Die Mittelpunkte $M_{AB}$, $M_{BC}$, $M_{CD}$ und $M_{DA}$ der Seiten eines beliebigen (auch räumlichen) Vierecks $ABCD$ bilden ein Parallelogramm.

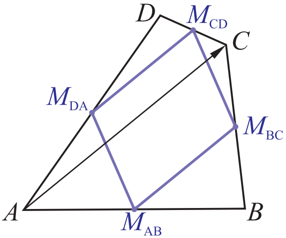
**Beweis:** Man muss nur zeigen, dass $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{DA}M_{CD}}$ gilt.

Da $M_{AB}$ der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und $M_{BC}$ der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ ist, gilt

$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AB}B} + \overrightarrow{BM_{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ und analog dazu

$\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}} = \overrightarrow{M_{DA}D} + \overrightarrow{DM_{CD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Damit ist die Behauptung $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{DA}M_{CD}}$ erfüllt. □



### Schwerpunkt eines Dreiecks

In einem beliebigen Dreieck $\Delta ABC$ schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt (der als *Schwerpunkt* des Dreiecks bezeichnet wird). Dieser teilt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2:1.

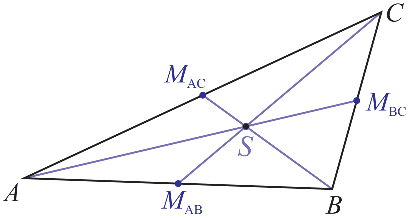
Beweis: Wir zeigen, dass alle Seitenhalbierenden durch den Punkt $S$ mit

$$\overrightarrow{AS} = \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$$

verlaufen und dass $S$ alle Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt.

Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\overrightarrow{AS} = \tfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AM_{BC}}, \quad \overrightarrow{BS} = \tfrac{2}{3}\,\overrightarrow{BM_{AC}} \quad \text{sowie} \quad \overrightarrow{CS} = \tfrac{2}{3}\,\overrightarrow{CM_{AB}}.$$



### Schwerpunkt eines Dreiecks

In einem beliebigen Dreieck $\Delta ABC$ schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt (der als *Schwerpunkt* des Dreiecks bezeichnet wird). Dieser teilt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2:1.

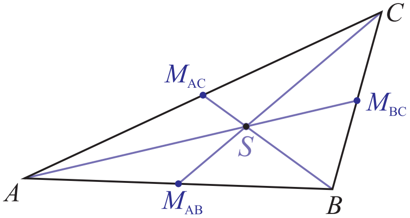
Beweis: Wir zeigen, dass alle Seitenhalbierenden durch den Punkt $S$ mit

$$\overrightarrow{AS} = \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$$

verlaufen und dass $S$ alle Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt.

Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\overrightarrow{AS} = \tfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AM_{BC}}, \quad \overrightarrow{BS} = \tfrac{2}{3}\,\overrightarrow{BM_{AC}} \quad \text{sowie} \quad \overrightarrow{CS} = \tfrac{2}{3}\,\overrightarrow{CM_{AB}}.$$



### Schwerpunkt eines Dreiecks

In einem beliebigen Dreieck $\Delta ABC$ schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt (der als *Schwerpunkt* des Dreiecks bezeichnet wird). Dieser teilt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2:1.

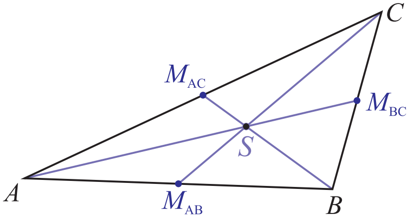
Beweis: Wir zeigen, dass alle Seitenhalbierenden durch den Punkt $S$ mit

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$$

verlaufen und dass $S$ alle Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt.

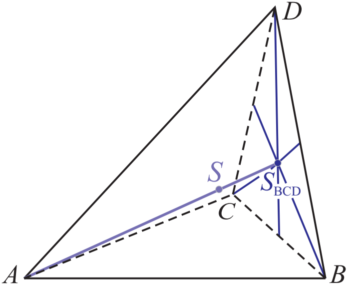
Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AM_{BC}}, \quad \overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BM_{AC}} \quad \text{sowie} \quad \overrightarrow{CS} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CM_{AB}}.$$



## Schwerpunkt eines Tetraeders

In einem beliebigen Tetraeder $ABCD$ schneiden sich die vier Schwerlinien, d. h. die Verbindungsstrecken $\overline{AS_{BCD}}$, $\overline{BS_{ACD}}$, $\overline{CS_{ABD}}$ und $\overline{DS_{ABC}}$ der Eckpunkte mit den Schwerpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen, in einem Punkt. Dieser teilt die Schwerlinien jeweils im Verhältnis 3:1.



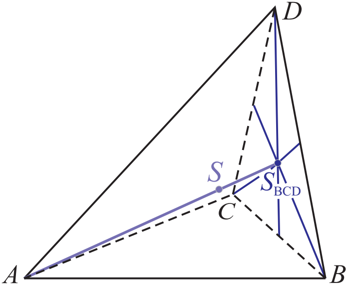

Beweis: Wir zeigen, dass alle Schwerlinien durch den Punkt $S$ mit

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

verlaufen und dieser Punkt alle Schwerlinien im Verhältnis 3:1 teilt.

## Schwerpunkt eines Tetraeders

In einem beliebigen Tetraeder $ABCD$ schneiden sich die vier Schwerlinien, d. h. die Verbindungsstrecken $\overline{AS_{BCD}}$, $\overline{BS_{ACD}}$, $\overline{CS_{ABD}}$ und $\overline{DS_{ABC}}$ der Eckpunkte mit den Schwerpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen, in einem Punkt. Dieser teilt die Schwerlinien jeweils im Verhältnis 3:1.




Beweis: Wir zeigen, dass alle Schwerlinien durch den Punkt $S$ mit

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

verlaufen und dieser Punkt alle Schwerlinien im Verhältnis 3:1 teilt.

**Zugänge zum Vektorbegriff**

- Geometrische Zugänge (Pfeilklassen)
- Arithmetische Zugänge ($n$-Tupel)
- Rechengesetze – Vektorraumaxiome

**Erste Anwendungen von Vektoren in der Geometrie**

**Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten**

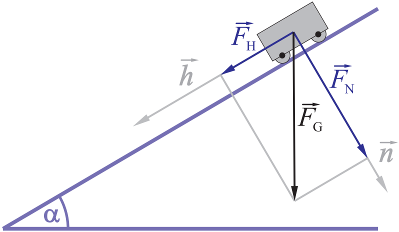
## Linearkombinationen in Anwendungssituationen

Bewegung eines Körpers entlang einer geneigten Ebene

- Hangabtriebskraft, Normalkraft: Komponenten der Gewichtskraft entlang zweier vorgegebener Richtungen, angegeben durch $\vec{h}$, $\vec{n}$
- Gewichtskraft des rollenden Objekts lässt sich in Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$ und Normalkraft $\vec{F}_N$ zerlegen: $\vec{F}_G = \vec{F}_H + \vec{F}_N$.
- Zur Bestimmung dieser Kräfte müssen (bei bekannter Gewichtskraft $\vec{F}_G$) Koeffizienten $\lambda$ und $\mu$ ermittelt werden, so dass

$$\vec{F}_G = \lambda\,\vec{h} + \mu\,\vec{n}.$$

- Hangabtriebs- und Normalkraft: $\vec{F}_H = \lambda\,\vec{h}$, $\vec{F}_N = \mu\,\vec{n}$.



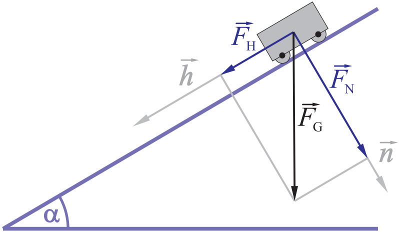
## Linearkombinationen in Anwendungssituationen

Bewegung eines Körpers entlang einer geneigten Ebene

- Hangabtriebskraft, Normalkraft: Komponenten der Gewichtskraft entlang zweier vorgegebener Richtungen, angegeben durch $\vec{h}$, $\vec{n}$
- Gewichtskraft des rollenden Objekts lässt sich in Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$ und Normalkraft $\vec{F}_N$ zerlegen: $\vec{F}_G = \vec{F}_H + \vec{F}_N$.
- Zur Bestimmung dieser Kräfte müssen (bei bekannter Gewichtskraft $\vec{F}_G$) Koeffizienten $\lambda$ und $\mu$ ermittelt werden, so dass

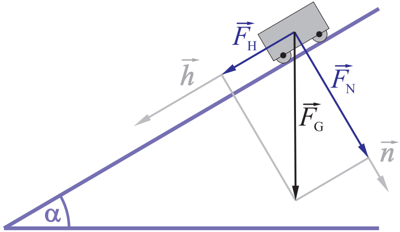
$$\vec{F}_G = \lambda \vec{h} + \mu \vec{n}.$$

- Hangabtriebs- und Normalkraft: $\vec{F}_H = \lambda \vec{h}$, $\vec{F}_N = \mu \vec{n}$.



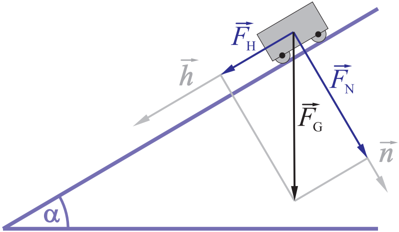
# Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

- Der Vektor $\vec{F}_G$ wird durch $\vec{F}_G = \lambda\,\vec{h} + \mu\,\vec{n}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{h}$ und $\vec{n}$ dargestellt.
- Durch $\vec{h}$ und $\vec{n}$ lässt sich jeder Vektor in der Ebene darstellen: $\vec{h}$, $\vec{n}$ bilden ein Erzeugendensystem für alle Vektoren der Ebene.
- Erzeugendensysteme der Ebene müssen offensichtlich immer aus mindestens zwei Vektoren bestehen. $\vec{h}$ und $\vec{n}$ bilden daher in der Ebene ein minimales Erzeugendensystem, genannt Basis.
- Die Koeffizienten $\lambda$ und $\mu$ in der o. a. Linearkombination nennt man Koordinaten des Vektors $\vec{F}_G$ bezüglich der Basis $\{\vec{h}; \vec{n}\}$.

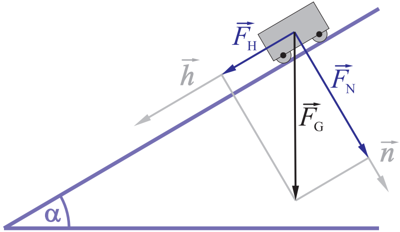


# Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

- Der Vektor $\vec{F}_G$ wird durch $\vec{F}_G = \lambda\,\vec{h} + \mu\,\vec{n}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{h}$ und $\vec{n}$ dargestellt.
- Durch $\vec{h}$ und $\vec{n}$ lässt sich jeder Vektor in der Ebene darstellen: $\vec{h}$, $\vec{n}$ bilden ein Erzeugendensystem für alle Vektoren der Ebene.
- Erzeugendensysteme der Ebene müssen offensichtlich immer aus mindestens zwei Vektoren bestehen. $\vec{h}$ und $\vec{n}$ bilden daher in der Ebene ein minimales Erzeugendensystem, genannt Basis.
- Die Koeffizienten $\lambda$ und $\mu$ in der o. a. Linearkombination nennt man Koordinaten des Vektors $\vec{F}_G$ bezüglich der Basis $\{\vec{h}; \vec{n}\}$.

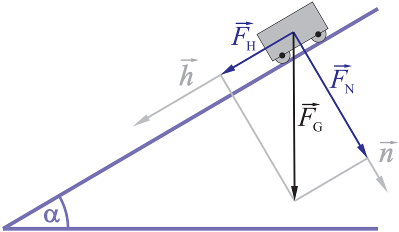


- Der Vektor $\vec{F}_G$ wird durch $\vec{F}_G = \lambda\,\vec{h} + \mu\,\vec{n}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{h}$ und $\vec{n}$ dargestellt.
- Durch $\vec{h}$ und $\vec{n}$ lässt sich jeder Vektor in der Ebene darstellen: $\vec{h}$, $\vec{n}$ bilden ein Erzeugendensystem für alle Vektoren der Ebene.
- Erzeugendensysteme der Ebene müssen offensichtlich immer aus mindestens zwei Vektoren bestehen. $\vec{h}$ und $\vec{n}$ bilden daher in der Ebene ein minimales Erzeugendensystem, genannt Basis.
- Die Koeffizienten $\lambda$ und $\mu$ in der o. a. Linearkombination nennt man Koordinaten des Vektors $\vec{F}_G$ bezüglich der Basis $\{\vec{h}; \vec{n}\}$.



# Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

- Der Vektor $\vec{F}_G$ wird durch $\vec{F}_G = \lambda\,\vec{h} + \mu\,\vec{n}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{h}$ und $\vec{n}$ dargestellt.
- Durch $\vec{h}$ und $\vec{n}$ lässt sich jeder Vektor in der Ebene darstellen: $\vec{h}$, $\vec{n}$ bilden ein Erzeugendensystem für alle Vektoren der Ebene.
- Erzeugendensysteme der Ebene müssen offensichtlich immer aus mindestens zwei Vektoren bestehen. $\vec{h}$ und $\vec{n}$ bilden daher in der Ebene ein minimales Erzeugendensystem, genannt Basis.
- Die Koeffizienten $\lambda$ und $\mu$ in der o. a. Linearkombination nennt man Koordinaten des Vektors $\vec{F}_G$ bezüglich der Basis $\{\vec{h}; \vec{n}\}$.



# Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Essenziell:

- anschaulich-plausibles Grundverständnis von Basen, Koordinaten
- Fähigkeit, für inner- oder außermathematische Anwendungen geeignete Basisvektoren auszuwählen

Betrachtungen zu Basen im Ein- bis Dreidimensionalen

- Im Eindimensionalen kann jeder Vektor eindeutig als Vielfaches eines beliebigen Vektors (außer $\vec{o}$) dargestellt werden.
- Im Zweidimensionalen kann jeder Vektor als Linearkombination zweier „geeigneter" Vektoren, im dreidimensionalen Fall dreier „geeigneter" Vektoren dargestellt werden.
- Was „geeignet" heißt, lässt sich auf ikonischer Ebene mithilfe von zwei bzw. drei Bleistiften gut veranschaulichen.
- Die „geeigneten" Vektoren heißen linear unabhängig.
- Bei „nicht geeigneten" Vektoren lässt sich einer durch die anderen darstellen – sie heißen linear abhängig.
  Etwas präziser: $n$ Vektoren heißen linear unabhängig, wenn keiner als Linearkombination der anderen dargestellt werden kann.

# Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Essenziell:

- anschaulich-plausibles Grundverständnis von Basen, Koordinaten
- Fähigkeit, für inner- oder außermathematische Anwendungen geeignete Basisvektoren auszuwählen

Betrachtungen zu Basen im Ein- bis Dreidimensionalen

- Im Eindimensionalen kann jeder Vektor eindeutig als Vielfaches eines beliebigen Vektors (außer $\vec{o}$) dargestellt werden.
- Im Zweidimensionalen kann jeder Vektor als Linearkombination zweier „geeigneter“ Vektoren, im dreidimensionalen Fall dreier „geeigneter“ Vektoren dargestellt werden.
- Was „geeignet“ heißt, lässt sich auf ikonischer Ebene mithilfe von zwei bzw. drei Bleistiften gut veranschaulichen.
- Die „geeigneten“ Vektoren heißen linear unabhängig.
- Bei „nicht geeigneten“ Vektoren lässt sich einer durch die anderen darstellen – sie heißen linear abhängig.
  Etwas präziser: $n$ Vektoren heißen linear unabhängig, wenn keiner als Linearkombination der anderen dargestellt werden kann.

# Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Essenziell:

- anschaulich-plausibles Grundverständnis von Basen, Koordinaten
- Fähigkeit, für inner- oder außermathematische Anwendungen geeignete Basisvektoren auszuwählen

Betrachtungen zu Basen im Ein- bis Dreidimensionalen

- Im Eindimensionalen kann jeder Vektor eindeutig als Vielfaches eines beliebigen Vektors (außer $\vec{o}$) dargestellt werden.
- Im Zweidimensionalen kann jeder Vektor als Linearkombination zweier „geeigneter" Vektoren, im dreidimensionalen Fall dreier „geeigneter" Vektoren dargestellt werden.
- Was „geeignet" heißt, lässt sich auf ikonischer Ebene mithilfe von zwei bzw. drei Bleistiften gut veranschaulichen.
- Die „geeigneten" Vektoren heißen linear unabhängig.
- Bei „nicht geeigneten" Vektoren lässt sich einer durch die anderen darstellen – sie heißen linear abhängig.
  Etwas präziser: $n$ Vektoren heißen linear unabhängig, wenn keiner als Linearkombination der anderen dargestellt werden kann.

# Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Essenziell:

- anschaulich-plausibles Grundverständnis von Basen, Koordinaten
- Fähigkeit, für inner- oder außermathematische Anwendungen geeignete Basisvektoren auszuwählen

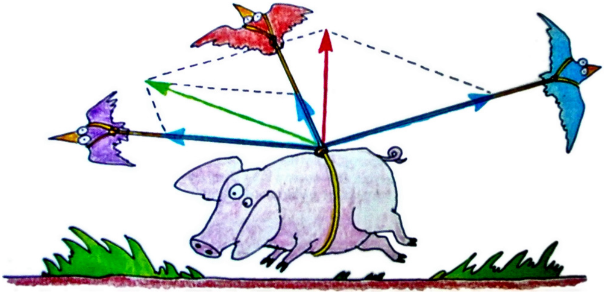
Betrachtungen zu Basen im Ein- bis Dreidimensionalen

- Im Eindimensionalen kann jeder Vektor eindeutig als Vielfaches eines beliebigen Vektors (außer $\vec{o}$) dargestellt werden.
- Im Zweidimensionalen kann jeder Vektor als Linearkombination zweier „geeigneter" Vektoren, im dreidimensionalen Fall dreier „geeigneter" Vektoren dargestellt werden.
- Was „geeignet" heißt, lässt sich auf ikonischer Ebene mithilfe von zwei bzw. drei Bleistiften gut veranschaulichen.
- Die „geeigneten" Vektoren heißen linear unabhängig.
- Bei „nicht geeigneten" Vektoren lässt sich einer durch die anderen darstellen – sie heißen linear abhängig.
  Etwas präziser: $n$ Vektoren heißen linear unabhängig, wenn keiner als Linearkombination der anderen dargestellt werden kann.

# Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Ziel: mit möglichst wenigen Vektoren alle anderen eindeutig darstellen zu können

- Die Vektoren einerseits linear unabhängig sein.
- Es müssen andererseits genügend viele sein, damit sich alle Vektoren daraus erzeugen lassen.



Basisvektoren in einem ungarischen Schulbuch: Sokszínű matematika (Vielfarbige Mathematik)

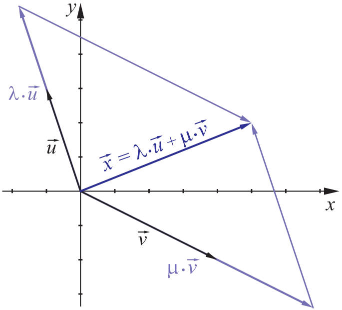
# Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Als Linearkombination von Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ bezeichnet man die Darstellung eines Vektors $\vec{x}$ mit

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \vec{u}_k \quad (\text{mit } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}).$$

Beispiel: Der Vektor $\vec{x} = \binom{5}{2}$ soll als Linearkombination der Vektoren $\vec{u} = \binom{-1}{3}$ und $\vec{v} = \binom{4}{-2}$ dargestellt werden.

Dazu sind geeignete Koeffizienten $\lambda$ und $\mu$ so zu bestimmen, dass $\vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ gilt, also $\binom{5}{2} = \lambda \cdot \binom{-1}{3} + \mu \cdot \binom{4}{-2}$.




Geometrische Deutung der Darstellung eines Vektors $\vec{x}$ als Linearkombination zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

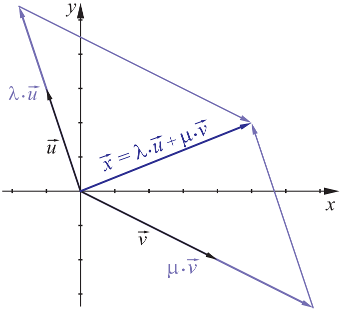
$\vec{u}$ und $\vec{v}$ geben die Richtungen der Seiten eines Parallelogramms an. Gesucht sind Koeffizienten $\lambda, \mu$, mit denen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ multipliziert werden müssen, damit der Vektor $\vec{x}$ eine Diagonale des von $\lambda\vec{u}$ und $\mu\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms beschreibt.

Als Linearkombination von Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ bezeichnet man die Darstellung eines Vektors $\vec{x}$ mit

$$\vec{x} \;=\; \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \vec{u}_k \qquad (\text{mit } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}).$$

Beispiel: Der Vektor $\vec{x} = \binom{5}{2}$ soll als Linearkombination der Vektoren $\vec{u} = \binom{-1}{3}$ und $\vec{v} = \binom{4}{-2}$ dargestellt werden.

Dazu sind geeignete Koeffizienten $\lambda$ und $\mu$ so zu bestimmen, dass $\vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ gilt, also $\binom{5}{2} \;=\; \lambda \cdot \binom{-1}{3} + \mu \cdot \binom{4}{-2}$.




Geometrische Deutung der Darstellung eines Vektors $\vec{x}$ als Linearkombination zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ geben die Richtungen der Seiten eines Parallelogramms an. Gesucht sind Koeffizienten $\lambda, \mu$, mit denen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ multipliziert werden müssen, damit der Vektor $\vec{x}$ eine Diagonale des von $\lambda\vec{u}$ und $\mu\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms beschreibt.

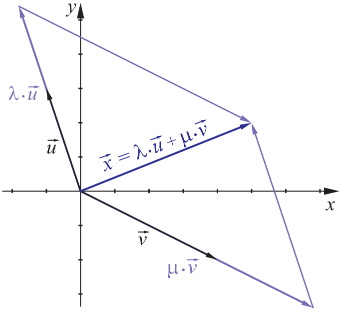
# Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Als Linearkombination von Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ bezeichnet man die Darstellung eines Vektors $\vec{x}$ mit

$$\vec{x} \;=\; \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \vec{u}_k \qquad (\text{mit } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}).$$

Beispiel: Der Vektor $\vec{x} = \binom{5}{2}$ soll als Linearkombination der Vektoren $\vec{u} = \binom{-1}{3}$ und $\vec{v} = \binom{4}{-2}$ dargestellt werden.

Dazu sind geeignete Koeffizienten $\lambda$ und $\mu$ so zu bestimmen, dass $\vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ gilt, also $\binom{5}{2} \;=\; \lambda \cdot \binom{-1}{3} + \mu \cdot \binom{4}{-2}$.




Geometrische Deutung der Darstellung eines Vektors $\vec{x}$ als Linearkombination zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ geben die Richtungen der Seiten eines Parallelogramms an. Gesucht sind Koeffizienten $\lambda, \mu$, mit denen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ multipliziert werden müssen, damit der Vektor $\vec{x}$ eine Diagonale des von $\lambda\vec{u}$ und $\mu\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms beschreibt.

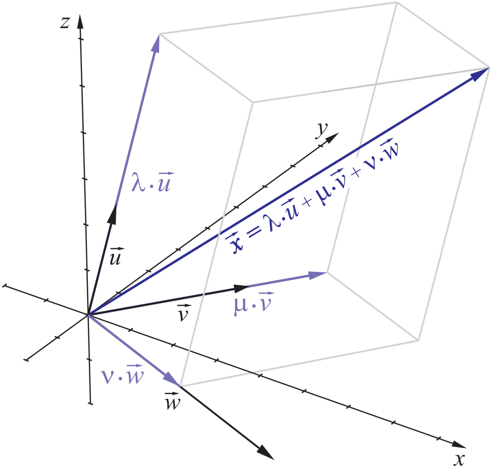
Geometrische Deutung der Darstellung eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination dreier Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

Die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ geben die Richtungen der Seiten eines Parallelepipeds (Spats) vor.

Werden $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ mit den aus

$$\vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$$

ermittelten Koeffizienten $\lambda$, $\mu$, $\nu$ multipliziert, so spannen die Vektoren $\lambda\vec{u}$, $\mu\vec{v}$ und $\nu\vec{w}$ ein Parallelepiped auf, in dem der Vektor* $\vec{x}$ eine Diagonale beschreibt.




* Genauer: ein Pfeil, der den Vektor $\vec{x}$ repräsentiert

Linearkombinationen von Vektoren

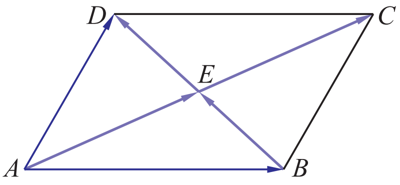
- verschiedene Beispiele rechnerisch bearbeiten und geometrisch interpretieren
- auch Spezialfälle betrachten:
  - das sich aus der LK ergebende LGS ist nicht lösbar
  - das sich aus der LK ergebende LGS hat unendlich viele Lösungen

## Anwendung von Linearkombinationen in der Geometrie

Strategie: durch Punkte geometrischer Figuren gegebene Vektoren als Linearkombinationen geeigneter Basisvektoren ausdrücken

Beispiel: In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

- Die Vektoren $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{AC}$ sowie $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{BD}$ sind jeweils kollinear. Somit existieren also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{AE} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BE} = \mu \cdot \overrightarrow{BD}$.
- Zeigen, dass $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ sein muss.
- Dazu wählen wir $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ als Basisvektoren und stellen $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{BE}$ als Linearkombinationen dieser Basisvektoren dar.

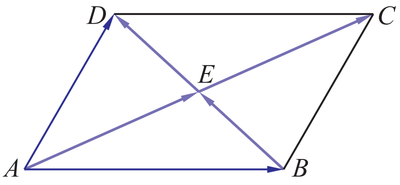


## Anwendung von Linearkombinationen in der Geometrie

Strategie: durch Punkte geometrischer Figuren gegebene Vektoren als Linearkombinationen geeigneter Basisvektoren ausdrücken

Beispiel: In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

- Die Vektoren $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{AC}$ sowie $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{BD}$ sind jeweils kollinear. Somit existieren also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{AE} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BE} = \mu \cdot \overrightarrow{BD}$.
- Zeigen, dass $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ sein muss.
- Dazu wählen wir $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ als Basisvektoren und stellen $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{BE}$ als Linearkombinationen dieser Basisvektoren dar.

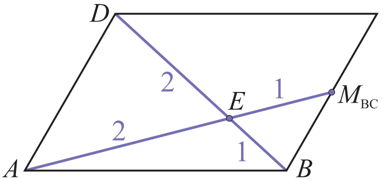


## Anwendung von Linearkombinationen in der Geometrie

Noch ein Beispiel:

In jedem Parallelogramm schneiden sich die Verbindungsstrecke eines beliebigen Eckpunktes mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite und die Diagonale durch die benachbarten Eckpunkte im Verhältnis 1:2.

- Wählen wiederum $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ als Basisvektoren.
- $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{BD}$ sowie $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{AM_{BC}}$ sind jeweils kollinear.
- Es existieren also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{AM_{BC}}$.
- Koeffizientenvergleich bezüglich der Basisvektoren



## Anwendung von Linearkombinationen in der Geometrie

Noch ein Beispiel:

In jedem Parallelogramm schneiden sich die Verbindungsstrecke eines beliebigen Eckpunktes mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite und die Diagonale durch die benachbarten Eckpunkte im Verhältnis 1:2.

- Wählen wiederum $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ als Basisvektoren.
- $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{BD}$ sowie $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{AM_{BC}}$ sind jeweils kollinear.
- Es existieren also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{AM_{BC}}$.
- Koeffizientenvergleich bezüglich der Basisvektoren