

# Lösen geometrischer Probleme in der Sekundarstufe II im Vergleich zur Sekundarstufe I

Andreas Filler

Geometrie wird in der Sekundarstufe II hauptsächlich vektoriell betrieben. Damit ergeben sich wesentliche Unterschiede beim Lösen geometrischer Probleme gegenüber der Sekundarstufe I:

1. Die für die S I substanziellen inhaltsspezifischen heuristischen Strategien geometrischen Problemlösens (z. B. Suche nach geeigneten Teildreiecken) verlieren an Bedeutung, es treten andere heuristische Strategien in den Mittelpunkt (Koordinatisieren, Ausdrücken von Punkten und Strecken durch Vektoren, Darstellung von Vektoren durch andere Vektoren, Nutzen des Skalarprodukts ...).
2. Viele geometrische Probleme sind mit vektoriellen Hilfsmitteln leichter – insbesondere „geradliniger“ – lösbar. Während es bei elementargeometrischen Lösungswegen oft entscheidender „Einfälle“ bedarf, die in der Ausgangs- und Zielkonfiguration nicht unmittelbar erkennbar sind, lassen sich viele Aufgaben mit vektoriellen Mitteln „direkter“ angehen, wofür aber die gekonnte Beherrschung des „Werkzeugs“ Vektorrechnung erforderlich ist.
3. In der S II werden geometrische Probleme größtenteils auf rechnerisch-algebraischem Wege gelöst.
4. Lösungen ebener Probleme mit vektoriellen Mitteln sind oftmals recht leicht auf analoge räumliche Probleme übertragbar.

Es soll hiermit keinesfalls gesagt werden, dass die für die S I spezifischen (elementargeometrischen) Strategien ab der Abiturstufe als „überholt“ anzusehen sind – im Gegenteil; es ist sogar wünschenswert, diese zu „pflegen“. Jedoch sollten Schülerinnen und Schüler anhand geeigneter Beispiele die Erfahrung machen, dass die Vektorrechnung Lösungswege zur Verfügung stellt, die es ihnen ermöglichen, vorher nur schwer zugängliche Probleme zu lösen. Zwei derartige Beispiele werden in diesem Beitrag beschrieben.

## Das „Schatzinselproblem“

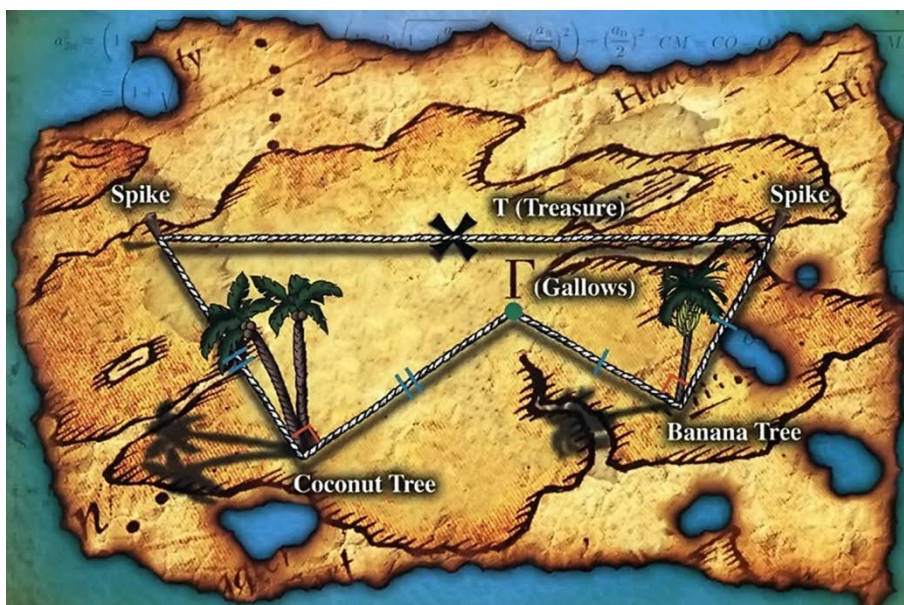


Abb. 1: Das Schatzinselproblem (Bildquelle: Libeskind 2008, S. 2)

Wegbeschreibung zum Schatz: *Laufe vom Galgen zum Kokosnussbaum, zähle deine Schritte. Drehe dich um 90° nach rechts und laufe so viele Schritte, wie du vom Galgen zum Kokosnussbaum gelaufen bist. Stecke einen Stock in den Boden. Geh zurück zum Gal-*

gen und laufe zum Bananenbaum, zähle wiederum die Schritte. Drehe dich um  $90^\circ$  nach links und laufe so viele Schritte, wie du vom Galgen zum Bananenbaum gelaufen bist. Stecke einen Stock in den Boden. Der Schatz befindet sich genau zwischen den beiden Stöcken.

Der Schatzsucher findet die beiden Bäume, aber keine Spur vom Galgen.

(Libeskind 2008, S. 2, in Anlehnung an George Gamow, 1947)

Ein besonderer Reiz dieser Aufgabe besteht darin, dass sie nicht lösbar zu sein scheint: Wo soll man mit der Suche beginnen, wenn man nicht weiß, wo der Galgen stand? Schülerinnen und Schüler sowohl der achten als auch der zwölften Jahrgangsstufe (die jeweils zuvor in Dynamischer Geometriesoftware mit Ortslinien experimentiert hatten) kamen auf die Idee, die Situation mit einem willkürlich angeordneten Galgen in GeoGebra nachzukonstruieren (siehe Abb. 2) und dann die Position des Schatzes bei Änderung der Position des Galgens zu verfolgen, um daraus eventuelle „Regelmäßigkeiten“ abzuleiten. Sie waren hochgradig erstaunt, dass der Schatz sich überhaupt nicht bewegte – egal wohin sie den Galgen zogen.

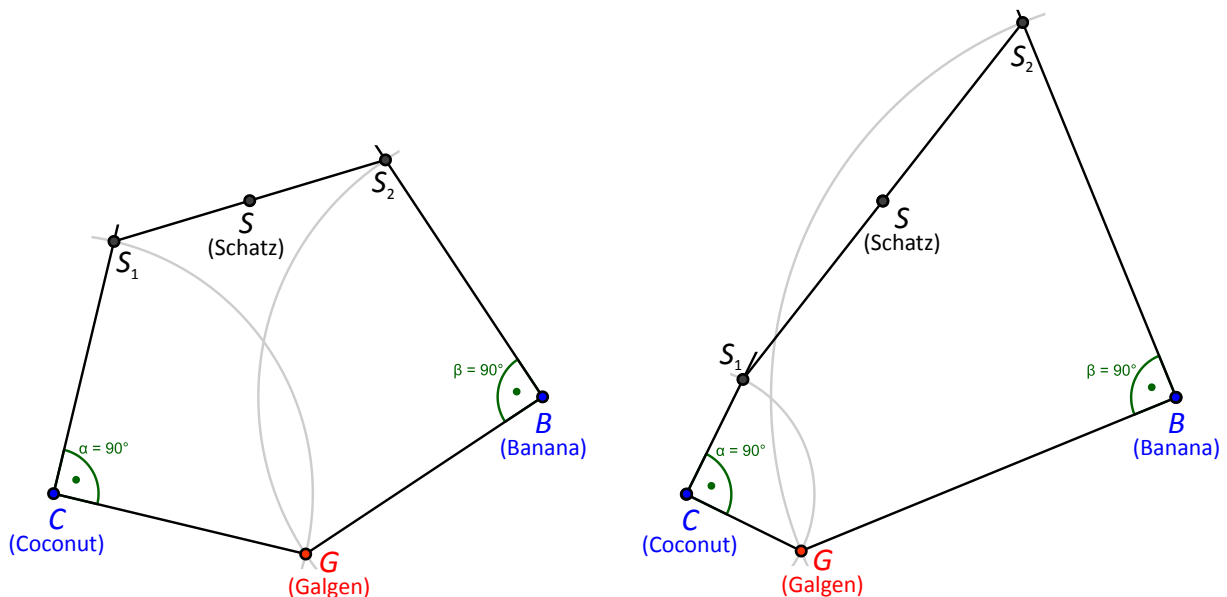


Abb. 2: Untersuchung des Schatzinselproblems mithilfe von GeoGebra

Nachdem die Experimente mit der Software zu der starken Vermutung führen (man kann fast von Evidenz sprechen), dass die Position des Schatzes von der des Galgens unabhängig ist, also nur von den Positionen der beiden Bäume abhängt, stellt sich die Frage, wie sich die Lage des Schatzes beschreiben lässt.

## Lösung des Schatzinselproblems mit Mitteln der Sekundarstufe I

Um die Position des Schatzes zu ermitteln, führen zunächst zwei Strategien weiter.

- „Naive“ Symmetrieüberlegungen: In der Wegbeschreibung sind beide Bäume „gleichberechtigt“. Wenn die Position des Schatzes also wirklich nur von den Bäumen (und nicht vom Galgen) abhängt, denn müsste der Schatz von beiden Bäumen gleich weit entfernt sein, also auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $\overline{CB}$  (Coconut – Banana) liegen.
- Betrachten von Spezialfällen: Könnte der Galgen auch direkt an einem der beiden Bäume gestanden haben? Dann lässt sich die Position des Schatzes leicht ermitteln, und man erhält für beide Bäume dasselbe Ergebnis: Der Schatz liegt im Diagonalschnittpunkt eines über der Strecke  $\overline{CB}$  errichteten Quadrats (Abb. 3).

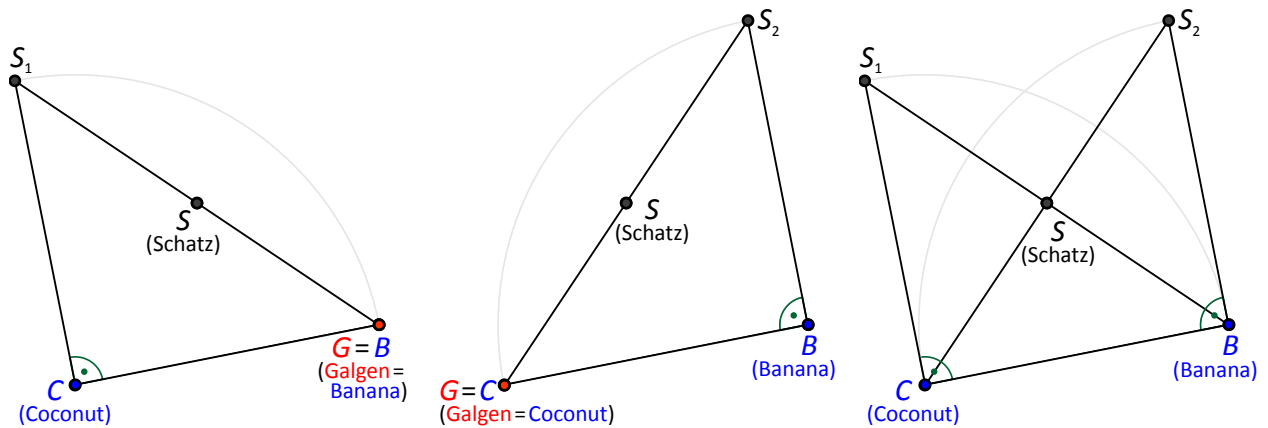


Abb. 3: Lage des Schatzes für spezielle Galgenpositionen

Die so gewonnenen Vermutungen lassen sich wiederum mithilfe von Geometrie-Software bestätigen. Erfahrungsgemäß betrachten viele Schülerinnen und Schüler das Problem damit als gelöst, wenngleich die Unabhängigkeit der Schatz- von der Galgenposition „nur experimentell“ ermittelt wurde. Mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 8, die in einer Arbeitsgemeinschaft bereits Erfahrungen mit geometrischen Beweisen sammeln konnten, sahen hingegen durchaus die Beweisnotwendigkeit. Jedoch gelang es auch leistungsstarken Schülerinnen und Schülern nicht, selbstständig eine tragfähige Beweisidee zu entwickeln. Der Grund hierfür dürfte darin liegen, dass hierzu Ideen notwendig sind, die mit der Betrachtung des Problems keinesfalls auf der Hand liegen. Der folgende Lösungsweg soll dies verdeutlichen.

Man geht von einem willkürlich festgelegten Galgen aus und konstruiert entsprechend der Wegbeschreibung die Position des Schatzes. Anschließend fällt man die Lote vom Galgen  $G$ , dem Schatz  $S$  und den beiden Stöcken  $S_1, S_2$  auf die Gerade  $CB$  durch die beiden Bäume und bezeichnet deren Fußpunkte z. B. wie in Abb. 4. (Wir betrachten den Fall, dass der Fußpunkt  $T$  des Lotes von  $G$  auf  $CB$  innerhalb der Strecke  $\overline{CB}$  liegt, anderenfalls kann man ähnlich vorgehen).

Die Beweisidee besteht nun darin, zu zeigen, dass

- $U$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{CB}$  ist sowie
- $\overline{SU}$  die Mittellinie des Trapezes  $PQS_2S_1$  ist und  $\overline{PS_1} + \overline{QS_2} = \overline{CB}$  gilt.

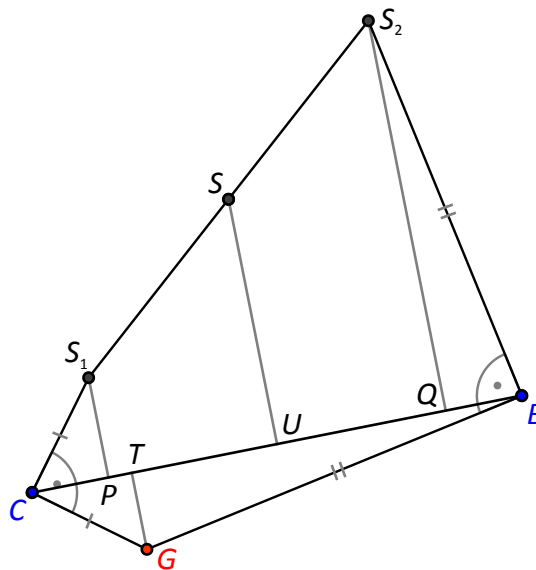


Abb. 4: Elementargeometrische Lösung des Schatzinselproblems

Wegen der Dreieckskongruenzen

$$CPS_1 \equiv GTC \text{ und } BQS_2 \equiv GTB$$

(die sich leicht mithilfe des Kongruenzsatzes „wsw“ begründen lassen) folgt  $\overline{CP} = \overline{GT} = \overline{BQ}$ . Da  $S$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{S_1S_2}$  ist und die Geraden  $S_1P$ ,  $SU$ ,  $S_2Q$  parallel sind, ist  $U$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{PQ}$  (was sich auf unterschiedliche Weisen begründen lässt), zusammen mit  $\overline{CP} = \overline{BQ}$  also auch der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{CB}$ .

Damit wurde nun „streng“ bewiesen, dass der Schatz  $S$  auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $\overline{CB}$  liegt und  $\overline{SU}$  Mittellinie des Trapezes  $PQS_2S_1$  ist. Außerdem ergibt sich aus den genannten Dreieckskongruenzen  $\overline{TC} = \overline{PS_1}$  und  $\overline{TB} = \overline{QS_2}$  und damit  $\overline{CB} = \overline{PS_1} + \overline{QS_2}$ . Nach dem Satz über die Mittellinie im Trapez gilt  $\overline{SU} = \frac{1}{2}(\overline{PS_1} + \overline{QS_2})$ , also  $\overline{SU} = \frac{1}{2}\overline{CB} = \overline{CU} = \overline{BU}$ .  $S$  ist somit – unabhängig von  $G$  – der Mittelpunkt eines über  $\overline{CB}$  errichteten Quadrats.

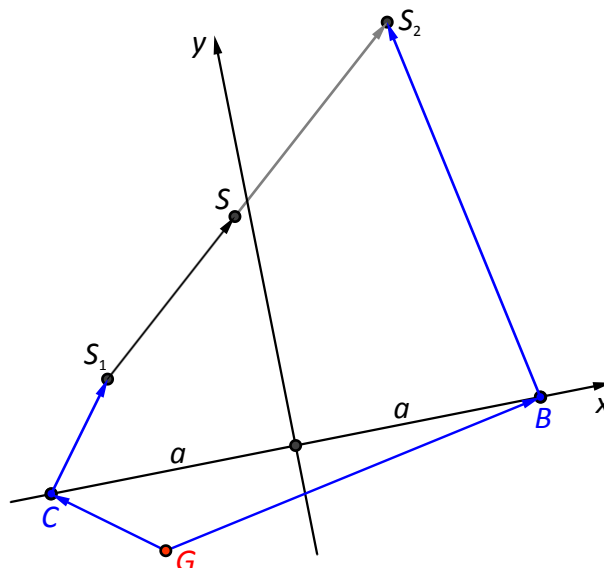
Die dargestellte Lösung erfordert die recht souveräne Anwendung für die Elementargeometrie der Sekundarstufe I typischer Problemlösestrategien:

- Suche nach geeigneten Hilfslinien (hier speziell der betrachteten Lote),
- Erkennen paralleler Geraden und Ausnutzen von Streckenverhältnissen beim Schnitt dieser mit anderen Geraden,
- Suche nach kongruenten Dreiecken und Ausnutzung der daraus entnehmbaren Streckenkongruenzen.

Insbesondere muss jedoch ein in der Ausgangskonstruktion nicht erkennbares Trapez genutzt werden, wobei es sich nicht um eine Standardstrategie zum Lösen geometrischer Aufgaben handelt. In dem Buch von Libeskind wird die dargestellte Lösung demnach in unmittelbarem Anschluss an die Behandlung des Satzes über die Mittellinie im Trapez vorgestellt, siehe (Libeskind 2008, S. 55f.). In meinen Unterrichtsversuchen half allerdings auch die Aufforderung „Suche ein Trapez, in dem das Lot von  $S$  auf  $CB$  die Mittellinie ist und drücke die Länge der Mittellinie durch  $\overline{CB}$  aus“ den beteiligten Schülerinnen und Schülern nicht, selbst die Lösung zu finden – es waren hierfür noch feinschrittigere Anleitungen nötig, sodass von selbstständigem Problemlösen kaum noch gesprochen werden kann.

## Nutzung der Vektorrechnung in der Sekundarstufe II

Der erste Schritt bei der analytischen Lösung geometrischer Aufgaben besteht häufig in der Wahl eines Koordinatensystems. Prinzipiell könnte für die Schatzinsel-Aufgabe ein beliebiges kartesisches Koordinatensystem verwendet werden, dennoch sollten Schülerinnen und Schüler immer wieder überlegen, ob ein günstig gewähltes Koordinatensystem die Lösung einfacher machen kann. Der in einem Unterrichtsversuch geäußerte Vorschlag, den Koordinatenursprung in den Galgen zu legen, wurde in der Diskussion schnell wieder verworfen, da ja die Position des Galgens nicht bekannt ist. Hingegen sind die beiden Bäume bekannt und „fest“, sodass es nahe liegt, durch sie die  $x$ -Achse sowie den Koordinatenursprung in ihren Mittelpunkt zu legen. Ist  $a$  der Abstand der beiden Bäume vom Koordinatenursprung, so lassen sich die Punkte  $C$ ,  $B$  und  $G$  folgendermaßen durch ihre Koordinatenpaare darstellen:  $C = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $G = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$ . Daraus erhält man leicht die Vektoren  $\overrightarrow{GC} = \begin{pmatrix} -a - x_G \\ -y_G \end{pmatrix}$  und  $\overrightarrow{GB} = \begin{pmatrix} a - x_G \\ -y_G \end{pmatrix}$ .



**Abb. 5:** Vektorielle Lösung des Schatzinselproblems.

(Richtig müsste der Punkt  $S$  auf der  $y$ -Achse liegen. In der Zeichnung ist dies absichtlich falsch dargestellt, damit diese Tatsache – die ja bewiesen werden soll – nicht „aus Versehen“ vorausgesetzt wird.)

Ein Lösungsplan liegt damit prinzipiell auf der Hand: Die Koordinaten von  $S$  müssen in Abhängigkeit von  $C$ ,  $B$  und  $G$  ausgedrückt werden, und durch geeignete Umformungen müssen die Koordinaten von  $G$  dabei „herausfallen“.

Mittels Vektoraddition (bzw. Punkt-Vektor-Addition) können Schülerinnen und Schüler die Wegbeschreibung recht leicht in der Form

$$S = G + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CS_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{S_1S_2} \quad \text{bzw.} \quad S = G + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BS_2} + \frac{1}{2} \overrightarrow{S_2S_1}$$

aufschreiben. Die Vektoren  $\overrightarrow{GC}$  und  $\overrightarrow{GB}$  sind bereits bekannt,  $\overrightarrow{S_1S_2}$  lässt sich durch

$$\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{S_1C} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BS_2} = -\overrightarrow{CS_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BS_2}$$

darstellen. Es bleiben aber noch  $\overrightarrow{CS_1}$  und  $\overrightarrow{BS_2}$  durch  $\overrightarrow{GC}$  und  $\overrightarrow{GB}$  auszudrücken. Dies ist recht leicht, wenn die Grassmannsche Ergänzung  $\ast \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  behandelt wurde (was aber oft nicht vorausgesetzt werden kann). Ansonsten gibt es verschiedene Möglichkeiten, einen zu einem gegebenen Vektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  orthogonalen Vektor gleichen Betrags zu finden. So kann man auf die meist im Analysisunterricht behandelte Tatsache zurückgreifen, dass eine zu einer Geraden mit dem Anstieg  $m$  senkrechte Gerade den Anstieg  $-\frac{1}{m}$  hat, oder das Skalarprodukt nutzen: Für zwei zueinander orthogonale Vektoren  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  muss  $xu + yv = 0$  sein, was mit  $u = -y$  und  $v = x$  erfüllt ist, zudem haben die Vektoren  $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$  denselben Betrag wie  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Welcher dieser Vektoren durch eine Rechts- und welcher durch eine Linksdrehung aus  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  entsteht, können Schülerinnen und Schüler zeichnerisch ermitteln (Abb. 6). Anhand dieser Überlegungen gelangen sie durch Drehung der Vektoren  $\overrightarrow{GC}$  und  $\overrightarrow{GB}$  zu  $\overrightarrow{CS_1} = \begin{pmatrix} -y_G \\ a + x_G \end{pmatrix}$  und  $\overrightarrow{BS_2} = \begin{pmatrix} y_G \\ a - x_G \end{pmatrix}$ .

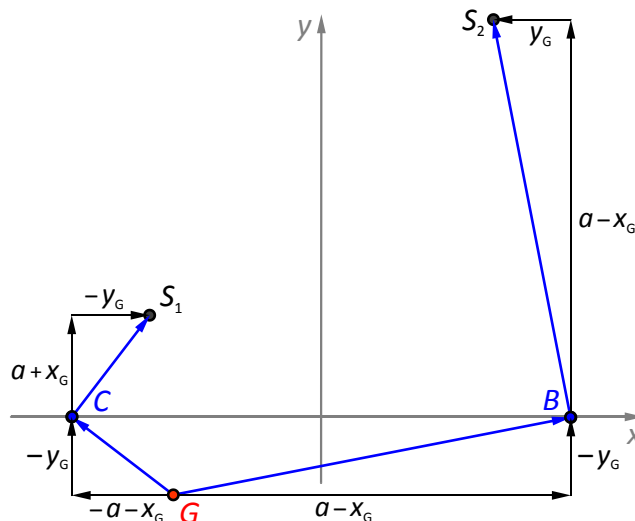


Abb. 6: Beschreibung orthogonaler und betragsgleicher Vektoren

Damit erhält man nun

$$\overrightarrow{S_1 S_2} = -\overrightarrow{CS_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BS_2} = \begin{pmatrix} y_G \\ -a - x_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_G \\ a - x_G \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a + y_G \\ -x_G \end{pmatrix}$$

und somit

$$S = G + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CS_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{S_1 S_2} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a - x_G \\ -y_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_G \\ a + x_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a + y_G \\ -x_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix},$$

also das gewünschte Resultat. Zur Probe sollte  $S$  auch noch mittels  $S = G + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BS_2} + \frac{1}{2} \overrightarrow{S_2 S_1}$  berechnet werden, wobei sich dasselbe Resultat ergibt.

Gegenüber dem zuvor vorgestellten elementargeometrischen Lösungsweg erfordert die vektorielle Lösung keine „genialen Ideen“ (wie die Betrachtung der Mittellinie in einem zunächst nicht sichtbaren Trapez), sondern „nur“ einen sicheren Umgang mit dem „Werkzeugkasten“ Vektorrechnung. Es handelt sich dennoch um ein zwar recht „geradliniges“ aber durchaus anspruchsvolles Vorgehen, bei dem zudem die Nützlichkeit der Vektorrechnung für das Lösen geometrischer Probleme deutlich wird. Vor allem aber bietet die vektorielle Vorgehensweise wesentlich bessere Chancen für Schülerinnen und Schüler, weitgehend selbstständig zur Lösung zu gelangen. In Workshops gelang dies der Mehrzahl der beteiligten Zwölftklässler, wozu allerdings erwähnt werden muss, dass die Beschreibung zu gegebenen Vektoren orthogonaler und betragsgleicher Vektoren im Vorfeld thematisiert wurde.

Von den vielfältigen Lösungsmöglichkeiten des Schatzinsel-Problems wurden hier lediglich zwei vorgestellt, die eng an Unterrichtsinhalte der Sekundarstufen I bzw. II anknüpfen. Andere Lösungswege basieren auf Drehungen (Libeskind 2008, S. 253), kombinieren elementar- und koordinatengeometrische Vorgehensweisen (Kuzle 2015, S. 76f.) oder nutzen komplexe Zahlen (Kuzle 2015, S. 78), (Libeskind 2008, S. 332f.).

## Schwerpunkte im Dreieck und im Tetraeder

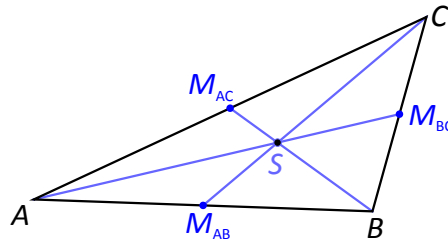
Schwerpunkte von Dreiecken können in unterschiedlichen Klassenstufen sinnvoll thematisiert werden, wobei sehr unterschiedliche Methoden und Strategien zum Einsatz kommen.

### Schwerpunkte von Dreiecken in der Sekundarstufe I

Bereits im sechsten oder siebten Schuljahr können Schülerinnen und Schüler untersuchen, auf welchem Punkt ein Dreieck auf einer Zirkelspitze liegen muss, damit man es „balancieren“ kann. Da ein solcher Punkt durch „blindes“ Probieren nicht leicht zu finden ist, werden sie aufgefordert, zunächst Schwerlinien zu finden, d. h. ein Dreieck auf einem Lineal zu balancieren (wobei ein Eckpunkt des Dreiecks auf dem Lineal liegen soll), siehe z. B. das Schulbuch (Lergenmül-

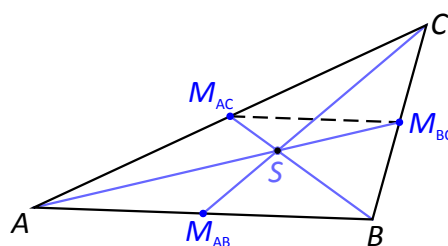
ler/Schmidt 2006, S. 165). Durch Messungen erkennen sie, dass es sich bei diesen Schwerlinien um die Seitenhalbierenden des Dreiecks handelt (nach der Behandlung der Dreieckskongruenz lässt sich dann auch exakt begründen, dass die Seitenhalbierenden ein Dreieck jeweils in flächengleiche, also „gleich schwere“ Teildreiecke unterteilen). Durch Konstruktionen und weitere Messungen gelangen sie zu der folgenden Erkenntnis:

*In jedem Dreieck schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt (dem Schwerpunkt des Dreiecks). Dieser teilt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2:1.*



**Abb. 7:** Schwerpunkt eines Dreiecks

Ein Beweis dieses Satzes ist mit den Mitteln, die in der Jahrgangsstufe 7 üblicherweise zur Verfügung stehen, noch nicht möglich, sondern erst nach der Behandlung der Ähnlichkeit von Dreiecken bzw. der Strahlensätze (meist in der Jahrgangsstufe 9).<sup>1</sup> Einige Schulbücher stellen den Beweis in diesem Kontext als Aufgabe. So wird in (Lütticken/Uhl 2008, S. 26) mitgeteilt, dass sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden, und die Aufgabe gestellt, zu zeigen, dass der Schnittpunkt alle Seitenhalbierenden im gleichen Verhältnis teilt, und dieses Verhältnis zu bestimmen. Als Hilfestellung dient eine Skizze ähnlich zu Abb. 8, welche Schülerinnen und Schülern Hilfe bei der Nutzung einer geeigneten Strategie (Suche nach Strahlensatzfiguren oder nach ähnlichen Dreiecken) gibt. Damit können sie zu  $\overline{M_{AC}S} = \frac{1}{2}\overline{SB}$  und  $\overline{M_{BC}S} = \frac{1}{2}\overline{SA}$  gelangen.



**Abb. 8:** Beweishilfe zum Schnittverhältnis der Seitenhalbierenden

Anspruchsvoller wird die Aufgabe, wenn die Voraussetzung, dass sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden, nicht gegeben (und in Abb. 8 die Strecke  $\overline{M_{AB}C}$  weggelassen) und gefordert wird, zu zeigen, dass sich je zwei Seitenhalbierende im gleichen Verhältnis teilen und damit zu begründen, dass die Schnittpunkte übereinstimmen müssen.

## Koordinaten des Schwerpunktes

Bereits gegen Ende der S I lässt sich der Frage nach den Koordinaten des Schwerpunktes nachgehen. Sinnvoll ist es hierzu, *Analogiebetrachtungen* anzustellen: Für den Mittelpunkt  $S$  einer Strecke  $\overline{AB}$  (der auch „Schwerpunkt“ der Strecke ist) können Schülerinnen und Schüler die Koordinaten ermitteln:  $x_S = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ ,  $y_S = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$ , es handelt sich um die arithmetischen Mittel der Eckpunktkoordinaten. Es liegt durchaus die Vermutung nahe, dass auch die Schwerpunktkoordinaten eines Dreiecks  $ABC$  die arithmetischen Mittel der Eckpunktkoordinaten sind:

<sup>1</sup> Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung des Schnittverhältnisses, nämlich mithilfe geschickter Koordinatisierungen und der Darstellung der Dreiecksseiten und der Seitenhalbierenden als Graphen linearer Funktionen, wird in (Wendt 2003) beschrieben.

$$x_S = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), \quad y_S = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C).$$

(Diese Überlegung lässt sich für die Koordinaten des Schwerpunktes eines Tetraeders fortsetzen.) Zu zeigen, dass diese Gleichungen richtig sind, ist mit elementaren koordinatengeometrischen Mitteln möglich, wenn zuvor erarbeitet wurde, dass sich die Seitenhalbierenden gegenseitig im Verhältnis 2:1 teilen: Es gilt (mit den Bezeichnungen in Abb. 7)  $x_{M_{AB}} = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$  und  $\overline{CS} = 2\overline{SM_{AB}}$ , also  $(x_S - x_C) = 2(x_{M_{AB}} - x_S)$  bzw.  $3x_S = 2x_{M_{AB}} + x_C = x_A + x_B + x_C$  (analog für  $y_S$ ).

Wir haben gesehen, dass bei der Behandlung des Schwerpunkts schon in der S I sehr unterschiedliche Strategien zum Lösen geometrischer Probleme zum Einsatz kommen können. Neben dem experimentellen Finden von Vermutungen und der Nutzung von Strahlensatzfiguren oder ähnlichen Dreiecken gehört dazu auch das Koordinatisieren. In der S II lässt sich mit dem dann verfügbaren Instrumentarium der Vektorrechnung die Thematik erneut aufgreifen.

## Vektorielle Behandlung des Schwerpunkts eines Dreiecks in der Sekundarstufe II

Um vektorielle Beweise führen zu können, kommt es oft entscheidend darauf an, die Behauptung in geeigneter Weise zu formulieren. Für den Satz über den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden kann man hierfür verschiedene Ausgangspunkte wählen. So lässt sich die Koordinatendarstellung des Schwerpunktes vektoriell zunächst in der Form  $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$  (mit  $O$  als Koordinatenursprung) schreiben. Eine entscheidende Strategie beim vektoriellen Lösen geometrischer Probleme besteht oftmals darin, Voraussetzungen und Behauptungen möglichst „einfach“ auszudrücken, wobei nur Vektoren zwischen den „beteiligten“ Punkten auftreten.  $O$  „stört“ in diesem Sinne – Schülerinnen und Schüler sollten daher die obige Darstellung so umformen, dass  $O$  nicht mehr auftritt, z. B. in  $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ . Zu derselben Darstellung gelangt man auch durch vektorielles Aufschreiben der Behauptung, dass sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden und dieser die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2:1 teilt (siehe Abb. 7):

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AM_{AB}} + \overrightarrow{M_{AB}S} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{M_{AB}C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{M_{AB}A} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Den Satz über den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden kann man also beweisen, indem man zeigt, dass alle drei Seitenhalbierenden durch den Punkt  $S$  mit

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

verlaufen und dass  $S$  alle drei Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn (mit den Bezeichnungen in Abb. 7) gilt:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_{BC}}, \quad \overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_{AC}} \quad \text{sowie} \quad \overrightarrow{CS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_{AB}}.$$

Wegen  $\overrightarrow{AM_{BC}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_{BC}} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$  und  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$  ist

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AM_{BC}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS}.$$

Auf analoge Weise lässt sich zeigen, dass  $\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_{AC}}$  und  $\overrightarrow{CS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_{AB}}$  gilt, der Punkt  $S$  also alle drei Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt.

Dieser vektorielle Beweis hat gegenüber den für die Sekundarstufe I beschriebenen Überlegungen keine neuen Erkenntnisse gebracht und kann gegenüber diesen auch nicht als besonders „einfach“ angesehen werden. Jedoch ist er sehr „effizient“, da er die zuvor schrittweise erarbeiteten Eigenschaften (Existenz eines gemeinsamen Schnittpunkts aller drei Seitenhalbierenden, Teilungsverhältnis, Koordinaten des Schwerpunkts) mit einer einzigen Rechnung gesichert hat. Die Ursache für diese Effizienz sollte mit Schülerinnen und Schülern auch explizit reflektiert

werden: Vektorgleichungen enthalten i. Allg. „stärkere“ Aussagen als Gleichungen, in denen Beträge bzw. Längen auftreten. So bedeutet z. B.  $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_{BC}}$  nicht nur, dass die Länge der Strecke  $\overline{AS}$  zwei Drittel der Länge von  $\overline{AM_{BC}}$  beträgt, sondern außerdem auch, dass die Vektoren  $\overrightarrow{AS}$  und  $\overrightarrow{AM_{BC}}$  kollinear sind und der Punkt  $S$  somit auf der Geraden  $AM_{BC}$  liegt.

### Der Schwerpunkt eines Tetraeders

Der oben geführte vektorielle Beweis offenbart eine Stärke vektorieller Methoden, die darin besteht, räumliche Probleme oft analog zu den entsprechenden ebenen Sachverhalten bearbeiten zu können. Wir betrachten dazu den folgenden Satz über den Schwerpunkt eines Tetraeders.<sup>2</sup>

*In einem beliebigen Tetraeder  $ABCD$  schneiden sich die vier Schwerlinien, d. h. die Verbindungsstrecken  $\overline{AS_{BCD}}$ ,  $\overline{BS_{ACD}}$ ,  $\overline{CS_{ABD}}$  und  $\overline{DS_{ABC}}$  der Eckpunkte mit den Schwerpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen, in einem Punkt  $S$  (dem Schwerpunkt des Tetraeders). Dieser teilt die Schwerlinien jeweils im Verhältnis 3:1.*

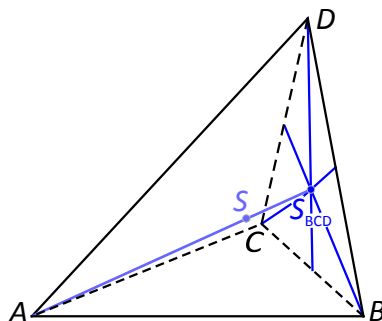


Abb. 9: Schwerpunkt eines Tetraeders

Zunächst muss die Behauptung analog zu oben (für den Schwerpunkt im Dreieck) vektoriell formuliert werden. Damit ist dann zu zeigen, dass alle Schwerlinien durch den Punkt  $S$  mit

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

verlaufen und dass dieser Punkt alle drei Schwerlinien im Verhältnis 3:1 teilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\overrightarrow{AS_{BCD}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AS}, \quad \overrightarrow{BS_{ACD}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BS}, \quad \overrightarrow{CS_{ABD}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CS} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{DS_{ABC}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DS}.$$

Die Schwerpunkte der Seitenflächen lassen sich (mit den Bezeichnungen in Abb. 9) durch

$$\overrightarrow{AS_{ABC}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AS_{ABD}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AS_{ACD}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{BS_{BCD}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$$

darstellen. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS_{BCD}} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS_{BCD}} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AS}. \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise lässt sich nachweisen, dass  $\overrightarrow{BS_{ACD}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BS}$ ,  $\overrightarrow{CS_{ABD}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CS}$  und  $\overrightarrow{DS_{ABC}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DS}$  gilt, der Punkt  $S$  also alle vier Schwerlinien im Verhältnis 3:1 teilt.

### Zusammenfassende Bemerkungen

Die beiden behandelten Beispiele verdeutlichen die eingangs formulierten Thesen, dass vektorielle gegenüber elementargeometrischen Vorgehensweisen beim Lösen geometrischer Probleme

<sup>2</sup> Natürlich lässt sich dieser Satz auch mit elementargeometrischen Mitteln beweisen, siehe z. B. (Fritsch 2009), dies ist jedoch nicht durch direkte Übertragung der Vorgehensweise beim Dreieck möglich.

häufig „geradliniger“ und effizienter sowie in vielen Fällen leichter auf dreidimensionale Sachverhalte übertragbar sind. Jedoch bedeutet „Geradlinigkeit“ nicht, dass die Lösungswege von vornherein auf der Hand liegen. Schülerinnen und Schüler müssen sich, um geometrische Probleme auf vektoriellern Wege erfolgreich zu lösen, mit einer Reihe von Fragen auseinandersetzen:

- Wie lässt sich ein geometrischer Sachverhalt analytisch ausdrücken? Welche analytische Darstellung erscheint für die Lösung des Problems besonders geeignet?
- Bei welchen Problemen ist es vorteilhaft, „koordinatenfrei“ (also rein vektoriell wie bei dem Beispiel „Schwerpunkt“) zu arbeiten; wann ist es sinnvoll oder sogar notwendig, Koordinaten zu verwenden (wie bei dem „Schatzinselpunkt“)?
- Wie sollte das Koordinatensystem gewählt werden, um die Problemlösung so einfach wie möglich zu gestalten?

Sinnvolle Antworten auf diese Fragen zu finden, gehört zu den wichtigsten Problemlösestrategien in der vektoriell betriebenen Geometrie. Um diese herauszubilden, bedarf es natürlich Erfahrungen, die nur durch das Lösen einer Reihe unterschiedlicher geometrischer Aufgaben mit vektoriellen Mitteln gesammelt werden können.

## **Literatur**

- Fritsch, R. (2009): Zur Elementargeometrie des Tetraeders. – In: Der Mathematikunterricht, 55 Heft 1, S. 3-15.
- Henn, H.-W.; Filler, A. (2015): Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. – Springer Spektrum, Heidelberg.
- Kuzle, A. (2015): Problem solving as an instructional method: The use of open problems in technology problem solving instruction. – In: LUMAT: Research and Practice in Math, Science and Technology Education, 3 Heft 1, S. 69-86.
- Lergenmüller, A.; Schmidt, G. (Hrsg.) (2006): Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien (Berlin, 7. Schuljahr). – Schroedel, Braunschweig.
- Libeskind, Sh. (2008): Euclidean and Transformational Geometry. A Deductive Inquiry. – Jones and Bartlett Publishers, Sudbury (Massachusetts).
- Lütticken, R.; Uhl, C. (Hrsg.) (2008): Fokus Mathematik Gymnasium Bd. 5 (Baden-Württemberg, 9. Schuljahr). – Cornelsen, Berlin.
- Wendt, P. (2003): Mit linearen Funktionen zum Schwerpunkt eines Dreiecks. – In: Praxis der Mathematik in der Schule, 45 Heft 3, S. 118.