Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

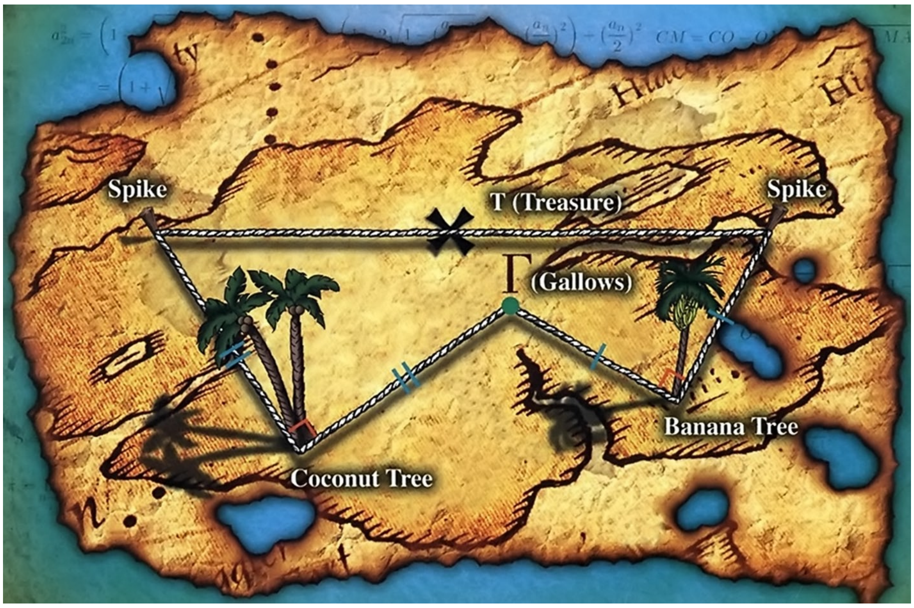
Problemlösen: Vergleiche elementargeometrischer und vektorgeometrischer Lösungsstrategien

Das „Schatzinselproblem“

Wegbeschreibung zum Schatz:

Laufe vom Galgen zum Kokosnussbaum, zähle deine Schritte. Drehe dich um 90° nach rechts und laufe so viele Schritte, wie du vom Galgen zum Kokosnussbaum gelaufen bist. Stecke einen Stock in den Boden. Geh zurück zum Galgen und laufe zum Bananenbaum, zähle wiederum die Schritte. Drehe dich um 90° nach links und laufe so viele Schritte, wie du vom Galgen zum Bananenbaum gelaufen bist. Stecke einen Stock in den Boden. Der Schatz befindet sich genau zwischen den beiden Stöcken.

Der Schatzsucher findet die beiden Bäume, aber keine Spur vom Galgen.



(a) Zum Sinn/Unsinn eingekleideter Aufgaben: Versuchen Sie die Aufgabe „rein mathematisch“ zu formulieren.

(b) Wo ist der Schatz? Finden Sie eine Vermutung und versuchen Sie, diese so plausibel wie möglich zu begründen. (Hier geht es noch nicht um einen Beweis.)

(c) Beweisen Sie Ihre Vermutung mit rein elementargeometrischen Mitteln oder (falls Sie keinen Beweis finden, was bei dieser Aufgabe durchaus verständlich wäre) notieren Sie, wie lange Sie sich erfolglos damit „herumgeschlagen“ haben.

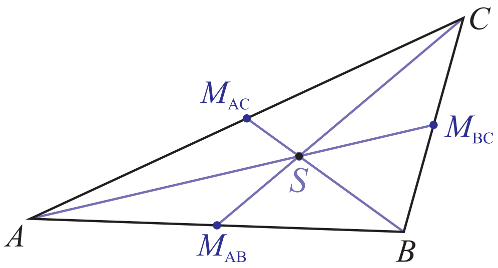
(d) Beweisen Sie Ihre Vermutung vektoriell bzw. bestimmen Sie die Position des Schatzes vektoriell (eine Vermutung brauchen Sie bei einer vektoriellen Lösung nicht unbedingt).

Hinweis: Man muss hierbei natürlich zu gegebenen Vektoren orthogonale Vektoren gleicher „Länge“ finden. Überlegen Sie sich dazu mögliche Wege, wenn die Grassmannsche Ergänzung *nicht* im Unterricht behandelt wurde.

(e) Vergleichen Sie Schwierigkeitsgrade und (soweit gefunden) Lösungsstrategien des elementargeometrischen und des vektoriellen Lösungsweges.

Schwerpunkte

In einem beliebigen Dreieck ΔABC schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt (der als *Schwerpunkt* des Dreiecks bezeichnet wird). Dieser teilt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2:1.



(a) Beweisen Sie den Satz mit elementargeometrischen Methoden.

(b) Überlegen Sie, wie sich die Koordinaten des Schwerpunktes in Abhängigkeit von den Eckpunktkoordinaten angeben lassen und wie sich eine entsprechende Vermutung mit Mitteln der Sekundarstufe I begründen lässt.

(c) Beweisen Sie den Satz vektoriell und vergewissern Sie sich, dass Sie damit „nebenbei“ auch die Erkenntnis aus (b) begründen können.

(d) Vergleichen Sie Schwierigkeitsgrade und Strategien der Lösungswege aus (a)-(c).

(e) Welche(r) der obigen Lösungswege lässt/lassen sich benutzen, um das räumliche Analogon des Satzes zu beweisen:

In einem beliebigen Tetraeder $ABCD$ schneiden sich die vier Schwerlinien, d. h. die Verbindungsstrecken $\overline{AS_{BCD}}$, $\overline{BS_{ACD}}$, $\overline{CS_{ABD}}$ und $\overline{DS_{ABC}}$ der Eckpunkte mit den Schwerpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen, in einem Punkt. Dieser teilt die Schwerlinien jeweils im Verhältnis 3:1.

Führen Sie einen entsprechenden Beweis.