Ergänzender Abschnitt: Die allgemeine Scheitelgleichung der regulären Kegelschnitte

In dem Abschnitt 2.3.2 des Buches werden exemplarisch Schnittfiguren eines Kreiskegels und einer Ebene betrachtet, wobei Ellipsen (und als Spezialfälle Kreise), Hyperbeln und Parabeln auftraten. Eigenschaften dieser Kurven werden in dem Abschnitt 2.4 behandelt. Mithilfe der Vektorrechnung ist es möglich, systematisch Schnittfiguren einer Ebene und eines Kreiskegels zu untersuchen.

Enthält eine Ebene die Spitze S eines Kreiskegels, so ist leicht zu überlegen, dass sich als Schnittfiguren ein einzelner Punkt (nämlich S), Geraden oder Paare von Geraden entstehen können. Diese Fälle werden im Folgenden nicht betrachtet, sondern die *regulären Kegelschnitte*, die sich als Schnittfiguren eines Kreiskegels K und einer Ebene ε ergeben, die nicht durch die Kegelspitze verläuft.

Um eine allgemeine Gleichung für Schnittfiguren einer Ebene und eines Kreiskegels herzuleiten, kommt der Wahl eines günstigen Koordinatensystems eine entscheidende Bedeutung zu. Als Koordinatenursprung O wählen wir denjenigen gemeinsamen Punkt von K und ε, der von der Kegelspitze S den geringsten Abstand hat, und als x-Achse die Gerade OA, wobei A der Schnittpunkt der Achse des Kegels mit ε ist; der Punkt A soll auf dem positiven Strahl der x-Achse liegen. Schließlich wählen wir als y-Achse die zur x-Achse senkrechte Gerade durch O in der Ebene ε und als z-Achse die durch O verlaufende und zu ε senkrechte Gerade (siehe Abb. 7.11 a für den Fall, dass ε nur eine Kegelhälfte und Abb. 7.11 b für den Fall, dass ε beide Kegelhälften schneidet).

Da die Ebene ε mit der x-y-Ebene identisch ist, gilt $z = 0$ für jeden Punkt P der Schnittmenge $K \cap \varepsilon$. Da O als derjenige Punkt von $K \cap \varepsilon$ gewählt war, der von S den kleinsten Abstand hat, liegt das Lot von S auf die x-y-Ebene auf der Geraden OA, also auf der x-Achse, es gilt somit $y_S = 0$. Über die Koordinaten der Punkte S und P ist somit $S(x_S; 0; z_S)$ und $P(x; y; 0)$ bekannt.

Ist $P \in K \cap \varepsilon$, so ist entweder $\angle(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SA}) = \alpha$ (wie in Abb. 7.11 a) oder $\angle(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SA}) = 180° - \alpha$ (wie in Abb. 7.11 b), wobei α der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist. Es gilt also

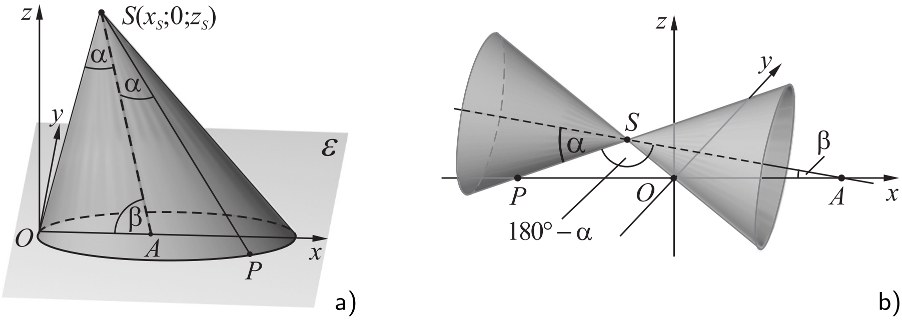

Abb. 7.11: Festlegung eines Koordinatensystems für die Untersuchung von Schnittfiguren einer Ebene und eines Kreiskegels

$$\cos\alpha = \cos\angle(\overrightarrow{SP},\overrightarrow{SA}) = \frac{\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SA}}{\left|\overrightarrow{SP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SA}\right|}$$

bzw.

$$\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha = \cos\angle(\overrightarrow{SP},\overrightarrow{SA}) = \frac{\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SA}}{\left|\overrightarrow{SP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SA}\right|}\,.$$

Ist $\vec{n}$ der zu $\overrightarrow{SA}$ gleich gerichtete Einheitsvektor, so folgt daraus

$$\overrightarrow{SP}\cdot\vec{n} = \left|\overrightarrow{SP}\right|\cdot\cos\alpha \quad\text{oder}\quad \overrightarrow{SP}\cdot\vec{n} = -\left|\overrightarrow{SP}\right|\cdot\cos\alpha\,.$$

In beiden Fällen ergibt sich durch Quadrieren

$$\left(\overrightarrow{SP}\cdot\vec{n}\right)^2 = \left|\overrightarrow{SP}\right|^2\cdot\cos^2\alpha\,.$$

Da auch O ein Punkt des Kegels mit $\angle(\overrightarrow{SO},\overrightarrow{SA}) = \alpha$ ist, gilt auch

$$\overrightarrow{SO}\cdot\vec{n} = \left|\overrightarrow{SO}\right|\cdot\cos\alpha\,.$$

Wegen $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OP}$ und damit $\overrightarrow{SP}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{SO}\cdot\vec{n}+\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}$ folgt daraus

$$(*)\qquad \left|\overrightarrow{SP}\right|^2\cdot\cos^2\alpha = \left(\left|\overrightarrow{SO}\right|\cdot\cos\alpha+\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}\right)^2\,.$$

Um zu einer Gleichung der Schnittkurven zu gelangen, werden die in $(*)$ auftretenden Vektoren in Komponentenschreibweise eingesetzt. Wegen $S(x_S;0;z_S)$ und $P(x;y;0)$ ist $\overrightarrow{SO} = \begin{pmatrix}-x_S\\0\\-z_S\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix}x-x_S\\y\\-z_S\end{pmatrix}$. Da die y-Komponente des Vektors $\vec{n}$ ebenfalls Null sein muss, lässt sich dieser Einheitsvektor durch $\vec{n} = \begin{pmatrix}x_n\\0\\z_n\end{pmatrix}$ (mit $x_n^2+z_n^2=1$) darstellen, somit gilt $\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n} = x\cdot x_n$.

Durch Einsetzen dieser Beziehungen in $(*)$ ergibt sich:

$$(x^2+x_S^2-2xx_S+y^2+z_S^2)\cos^2\alpha = (x_S^2+z_S^2)\cos^2\alpha+2xx_n\cos\alpha\sqrt{x_S^2+z_S^2}+x^2x_n^2\,.$$

Durch Vereinfachen dieser Gleichung und Auflösen nach y^2 ergibt sich

$$(**)\qquad y^2 = 2\left(\frac{x_n}{\cos\alpha}\sqrt{x_S^2+z_S^2}+x_S\right)\cdot x + \left(\frac{x_n^2}{\cos^2\alpha}-1\right)\cdot x^2$$

als Gleichung für einen beliebigen regulären Kegelschnitt. Um diese Gleichung in einer übersichtlicheren Form schreiben zu können, werden zwei Bezeichnungen eingeführt:

$$\varepsilon := \frac{x_n}{\cos\alpha}\,,\quad p := \varepsilon\cdot\sqrt{x_S^2+z_S^2}+x_S\,.$$

Die Größe ε wird als *numerische Exzentrizität*, p als *Parameter* eines Kegelschnittes bezeichnet. Die Gleichung $(**)$ nimmt damit die folgende Gestalt an.

Allgemeine Scheitelgleichung der regulären Kegelschnitte

Ein regulärer Kegelschnitt mit der numerischen Exzentrizität ε und dem Parameter p wird durch die Gleichung

$$y^2 = 2\,p\,x+(\varepsilon^2-1)\,x^2 \qquad (7.1)$$

beschrieben.

Für die numerische Exzentrizität eines Kegelschnittes gilt $\varepsilon = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, wobei β der Schnittwinkel zwischen der Ebene und der Kegelachse sowie 2α der Öffnungswinkel des Kegels ist (siehe Abb. 7.11 auf S. 1). Dies folgt daraus, dass der Schnittwinkel β aufgrund der Wahl des Koordinatensystems der Winkel zwischen $\vec{n}$ und einem Einheitsvektor in Richtung der x-Achse ist. Da $\vec{n}$ ebenfalls ein Einheitsvektor ist, gilt $\cos\beta = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_n$ und somit $\varepsilon = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. Da α ein spitzer und β ein spitzer oder ein rechter Winkel ist, gilt $\varepsilon \geq 0$

Wir untersuchen im Folgenden systematisch in Abhängigkeit von der numerischen Exzentrizität ε, welche Kurven durch die allgemeine Scheitelgleichung (7.1) beschrieben werden.

Fall 1: $\varepsilon = 0$. Wegen $\varepsilon = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ ist in diesem Falle $\cos\beta = 0$, also $\beta = 90°$; die Kegelachse steht senkrecht auf der Schnittebene, und die Schnittfigur ist ein Kreis. Setzt man $\varepsilon = 0$ in die Gleichung (7.1) ein, so ergibt sich

$$y^2 = 2px - x^2 = p^2 - (x-p)^2 \quad \text{bzw.} \quad (x-p)^2 + y^2 = p^2,$$

also tatsächlich die Gleichung eines *Kreises* mit dem Mittelpunkt $M(p;0)$.

Fall 2: $0 < \varepsilon < 1$. In diesem Falle müsste anhand anschaulicher Überlegungen wegen $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} < 1$ (und daher $\cos\beta < \cos\alpha$, also $\beta > \alpha$) eine Ellipse entstehen. Mit $k = -(\varepsilon^2 - 1)$ (also $k > 0$) nimmt (7.1) die Gestalt

$$y^2 = 2px - kx^2 = \frac{p^2}{k} - \frac{p^2}{k} + 2px - kx^2 = \frac{p^2}{k} - k\left(x - \frac{p}{k}\right)^2,$$

$$y^2 + k\left(x - \frac{p}{k}\right)^2 = \frac{p^2}{k} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\left(x - \frac{p}{k}\right)^2}{\frac{p^2}{k^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{k}} = 1$$

an. Es handelt sich um die Gleichung einer *Ellipse* in achsenparalleler Lage, siehe S. 80.

Fall 3: $\varepsilon = 1$. In diesem Falle sind der Schnittwinkel β zwischen der Ebene und der Kegelachse und der halbe Öffnungswinkel α des Kegels gleich groß. Die Scheitelgleichung (7.1) erhält die Form

$$y^2 = 2px,$$

beschreibt also eine *Parabel*.

Fall 4: $\varepsilon > 1$. In diesem Falle ist $\beta < \alpha$, anhand anschaulicher Überlegungen müsste als Schnittfigur eine Hyperbel entstehen. Durch die Umformung der Scheitelgleichung (7.1) lässt sich dies bestätigen. Setzt man $k := \varepsilon^2 - 1$ (also $k > 0$) so nimmt (7.1) die Gestalt

$$y^2 = 2px + kx^2 = -\frac{p^2}{k} + \frac{p^2}{k} + 2px + kx^2 = -\frac{p^2}{k} + k\left(x + \frac{p}{k}\right)^2,$$

$$k\left(x + \frac{p}{k}\right)^2 - y^2 = \frac{p^2}{k} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\left(x + \frac{p}{k}\right)^2}{\frac{p^2}{k^2}} - \frac{y^2}{\frac{p^2}{k}} = 1$$

an. Diese Gleichung beschreibt eine *Hyperbel* in achsenparalleler Lage.

Mit dieser Herleitung wurde die Rechtfertigung dafür erbracht, Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als *Kegelschnitte* zu bezeichnen und gleichzeitig gezeigt, dass Schnitte eines geraden Kreiskegels und einer Ebene, die nicht durch die Kegelspitze verläuft, stets Ellipsen (bzw. speziell Kreise), Hyperbeln und Parabeln sind.