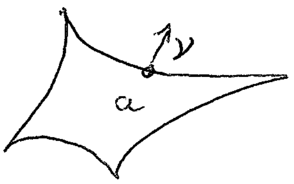
Ausblick in Richtung Satz von Stokes

- Sei Dimension $n = 2$, und Ω, G, ν, F wie in S. 7.1,

Sei $\hat{F} := D^{-90°} F = \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{F}$ ebenfalls in $C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$

$$\overset{T.7.1}{\underset{\text{(Gauß)}}{\Longrightarrow}} \int_G \operatorname{div} \hat{F}\, d\lambda_2 \overset{\text{Def } \hat{F}}{=} \int \underbrace{\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1}_{\operatorname{div} \hat{F}}\, d\lambda_2 = \int_{\partial G} \underbrace{\langle D^{-90°} F, \nu \rangle}_{= \langle F, D^{90°} \nu \rangle}\, d\lambda_{\partial G}$$



- **Def 7.9** a) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.
  Die Rotation des Vektorfeldes F ist $\operatorname{rot} F := \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \in C^0(\Omega)$

- b) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ C^1-Polyeder, mit regulärem Teil $M \subset \partial G$ (gem. D.5.7)
  Sei $\nu : M \to \mathbb{R}^2$ äußeres ENF zu ∂G.
  Dann heißt $\tau := D^{90°} \nu : M \to \mathbb{R}^2$ das positiv orientierte
- Einheitstangentialfeld zu ∂G.
  Seien Ω, F wie in a), $G = \bar{G} \subset \Omega$ mit $V_1(\partial G) < \infty$
  dann ist $\langle F, \tau \rangle$, fortgesetzt durch Null auf $\partial G \setminus M$, integrierbar auf ∂G
  und

$$\int_{\partial G} \langle F, \tau \rangle\, d\lambda_{\partial G}$$ heißt Zirkulation des Vektorfeldes F längs ∂G.

Bsp i) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F : (x,y) \mapsto (-y, x)$  $\Rightarrow \operatorname{rot} F(x,y) = 1 - (-1) = 2$

ii) $F : (x,y) \mapsto (x,y)$  $\Rightarrow \operatorname{rot} F(x,y) = 0 - 0 = 0$

Satz 7.10 (Stokes in $\mathbb{R}^2$): $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, G C^1 Polyeder wie in b) (d.h. Ω, G, F, τ wie in Def. b)), dann:

$$\underbrace{\int_G \operatorname{rot} F\, d\lambda_2}_{\text{"Integral der Rotation über } G \text{ ist gleich}} = \underbrace{\int_{\partial G} \langle F, \tau \rangle\, d\lambda_{\partial G}}_{\text{Zirkulation längs } \partial G\text{"}} \overset{\text{in Situation 7.7}}{=} \sum_{j=1}^{J} \int_{a_j}^{b_j} \langle F(c^j(t)), \dot{c}^j(t) \rangle\, dt$$

wg $\tau = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$, $\sqrt{\det G_c(t)} = \|\dot{c}(t)\|$

Bem 7.11 (Ausblick): aus 7.10 gelangen wir zu der klassischen Aussage des $\boxed{\text{Satzes von Stokes für Flächen im } \mathbb{R}^3}$:

- Im $\mathbb{R}^3$ ist die Rotation eines C^1-V.F. $F: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wie auf ÜB 13 def. als 3-dim. Vektorfeld. (rot $F :=$ "grad $\times F$")
- Sei, in der Situation von Bsp 7.7 ($G = C^1$-Polyeder in $\mathbb{R}^2$ mit ∂G ggb. durch endl. viele einfach geschlossene, stetige, (stückweise) ~~C^1-Kurven~~, reguläre C^1-Kurven)

  $\Psi: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung,
  $M := \Psi(\mathring{G}) \subset \overline{M} \subset U$ offen in $\mathbb{R}^3$ (eingebettete orientierte C^2-Fläche)
  $F: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^1-Vektorfeld.
- dann hat Stokes Integralsatz die Form, in Situation von 7.7 für G:

$$(*)\quad \int_M \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle = \int_{\partial M} \langle F, \tau \rangle \, d\lambda_M \overset{\text{Situation}}{\underset{\text{von 7.7}}{=}} \sum_{j=1}^{J} \int_{a_j}^{b_j} \langle F(\gamma^j(t)), \dot\gamma^j(t) \rangle dt$$

"ENF zu M" — Rand von M in Teilraumtopologie (in $\Psi(\Omega)$) — "pos. orientiertes (bzgl. ν) ETF längs ∂M"

mit: $\gamma^j := \Psi \circ c^j$, $\tau(\gamma^j(t)) := \dot\gamma^j(t) / \|\dot\gamma^j(t)\|$, $\nu := \partial_1\Psi \times \partial_2\Psi_2 / \|\partial_1\Psi \times \partial_2\Psi_2\|$

Beweis: durch Rückführen auf 7.10 (Stokes in $\mathbb{R}^2$)

in Situation von 7.7: $\mathring{G} \subset G = \overline{G} \subset \Omega$, $M \subset \overline{M} \subset U$ offen in $\mathbb{R}^3$
$\Psi|_{G^\circ}$ Einbettung, $M = \Psi(G^\circ)$.

$F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ für offene Umgeb. U von $\overline{M} \subset \mathbb{R}^3$

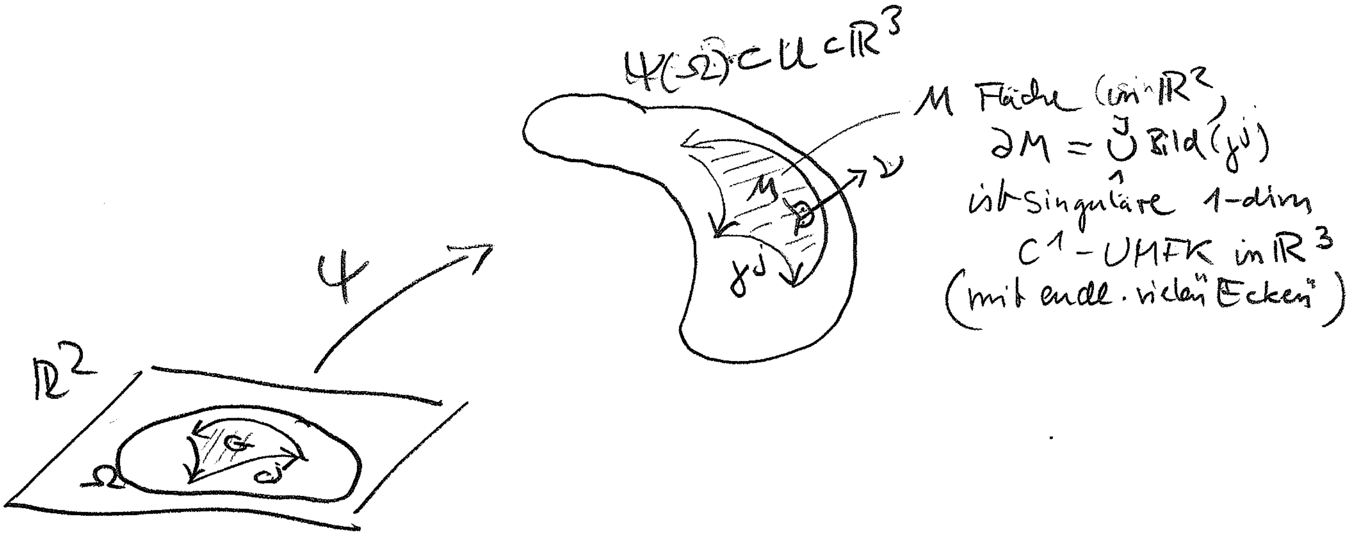
Beh: dann (*) mit τ, ν wie oben:

- zunächst $V_2(M) = \int_{G^\circ} 1 \cdot \sqrt{\det G_\Psi} \, d\lambda_2 \le \max\{\sqrt{\det G_\Psi(x)} \mid x \in \underbrace{G}_{\text{kpt}}\} \cdot \lambda(\underbrace{G_2}_{\text{kpt}})$
  $< \infty$ (stetig auf Kpt. um)

  $|\langle \operatorname{rot} F, \underset{\text{ENF}}{\nu} \rangle| \le \|\underbrace{\operatorname{rot} F}_{\text{stetig}}\|_{\underset{\text{kpt}}{\overline{M} = \Psi(G)}} < \infty$, also existiert Integral links in (*)

  Def. wie auf ÜB 13, (VF in $\mathbb{R}^3$!)

(Skizze zu 7.11)



- $\gamma^j := \psi \circ c^j$ sind wieder endlich viele einfach geschlossene, stetige, (stückweise) C^1-Kurven, regulär;
- insb. $\bigcup_{j=1}^{J} \mathrm{Bild}(\gamma^j) = \partial M$ ist singuläre 1-dim C^1 UMFK des $\mathbb{R}^3$, (mit endl. vielen "Ecken") und Länge$(\gamma^j) < \infty$, also $v_1(\partial M) < \infty$ und $|\langle F, \tau\rangle| \le \|F\|_{\overline{M}} < \infty$ auf $\overline{M}$, also existiert Integral rechts in (*) ebenfalls.

- <u>Beweis von (*)</u> durch Rückführen auf 7.10: (Stokes im $\mathbb{R}^2$)

→ def. $\tilde{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ durch $\tilde{F}(x) := (\langle F(\psi(x)), \partial_1\psi(x)\rangle, \langle F(\psi(x)), \partial_2\psi(x)\rangle)$

$\Rightarrow \tilde{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, weil $\psi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$

→ $$\operatorname{rot}\tilde{F}(x) = \partial_1\tilde{F}_2 - \partial_2\tilde{F}_1 = \langle F'(\psi(x))\cdot\partial_1\psi(x), \partial_2\psi(x)\rangle + \cancel{\langle F(\psi(x)), \partial_1\partial_2\psi(x)\rangle}$$
$$- \langle F'(\psi(x))\cdot\partial_2\psi(x), \partial_1\psi(x)\rangle - \cancel{\langle F(\psi(x)), \partial_2\partial_1\psi(x)\rangle}$$
$$= \sum_{i,k=1}^{3} \underbrace{\left(\partial_k F_i(\psi(x))\cdot\partial_1\psi_k(x)\cdot\partial_2\psi_i(x) - \partial_k F_i(\psi(x))\cdot\partial_2\psi_k(x)\cdot\partial_1\psi_i(x)\right)}_{\partial_k F_i(\psi(x))\left[\underbrace{\partial_1\psi_k(x)\partial_2\psi_i(x) - \partial_1\psi_i(x)\partial_2\psi_k(x)}_{(=0 \text{ für } i=k)}\right]}$$
$$= \sum_{1\le k<i\le 3} \left(\partial_k F_i(\psi(x)) - \partial_i F_k(\psi(x))\right)\cdot\left[\partial_1\psi_k(x)\partial_2\psi_i(x) - \partial_1\psi_i(x)\partial_2\psi_k(x)\right]$$
$$= \langle \underbrace{(\operatorname{rot} F)}_{\text{in } \mathbb{R}^3,\ \text{def. wie ÜB13!}}(\psi(x)), \partial_1\psi(x) \times \partial_2\psi(x)\rangle,$$ es folgt:

→ $$\int_M \langle \operatorname{rot} F, \nu\rangle \, d\lambda_M \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Karten bzw. Def} \\ (\varphi = \psi^{-1})}}{=} \int_{G^\circ} \langle (\operatorname{rot} F)\circ\psi, \frac{\partial_1\psi \times \partial_2\psi}{\|\partial_1\psi \times \partial_2\psi\|}\rangle \overbrace{\sqrt{\det g_\psi}}^{=\|\partial_1\psi\times\partial_2\psi\|} \, d\lambda_2$$
$$\overset{\text{s.o.}}{=} \int_{G^\circ} \operatorname{rot}\tilde{F}(x)\, d\lambda_2 \overset{7.10}{=} \int_{\partial G} \langle \tilde{F}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{positive ETF längs } \partial G}}{\tilde{\tau}} \rangle \, d\lambda_{\partial G} \overset{(\text{in } 7.7)}{=} \sum_{j=1}^{J} \int_{a_j}^{b_j} \langle \tilde{F}(c^j(t)), \dot{c}^j(t)\rangle \, dt$$
$$\underset{\psi' = (\partial_1\psi\ \partial_2\psi)}{\overset{\text{def } \tilde{F}}{=}} \sum_{j=1}^{J} \int_{a_j}^{b_j} \langle F(\psi(c^j(t))), \psi'(c^j(t))\cdot\dot{c}^j(t)\rangle \, dt \overset{\text{def } \gamma}{=} \sum_{j=1}^{J} \int_{a_j}^{b_j} \langle F(\gamma^j(t)), \dot{\gamma}^j(t)\rangle \, dt$$
$$= \sum_{j=1}^{J} \int_{a_j}^{b_j} \langle F(\gamma^j(t)), \underbrace{\frac{\dot{\gamma}^j(t)}{\|\dot{\gamma}^j(t)\|}}_{=\tilde{\tau}(\gamma^j(t))}\rangle \cdot \underbrace{\|\dot{\gamma}^j(t)\|}_{=\sqrt{\det g_{\gamma^j}(t)}} \, dt = \int_{\partial M} \langle F, \tau\rangle \, d\lambda_{\partial M}$$

□