6.2 Einfache Testverfahren

Mit einem Schwergewicht auf Beispielen diskutieren wir Grundbegriffe der parametrischen Schätztheorie.

Ein Testproblem ist ein Entscheidungsproblem. Es soll entschieden werden, ob eine Beobachtung zu einer aus einer Familie möglicher Verteilungen paßt.

Sei $\mathcal{X}$ Stichprobenraum. Hier setzen wir $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$, versehen mit der σ–Algebra $\mathcal{B}^d$. Sei $(\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta)$ eine Familie von W.maßen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B}^d)$.

Definition

Ein **Test** ist eine Entscheidungsregel, die bei einer Beobachtung x festlegt, ob man sich für die **Nullhypothese** $H_0 : \theta \in H$ oder die **Alternative** $H_1 : \theta \notin H$ entscheidet. Dabei ist $H \subset \Theta$. Der Test besteht aus der Festlegung einer Menge $R \subset \mathcal{X}$ (**kritischer Bereich, Verwerfungsbereich**), so dass die Beobachtung $x \in R$ zur **Verwerfung** von H_0 führt.

Dabei kann man Fehler machen.

Fehler 1. Art: H_0, aber H_0 verworfen, W.keit für einen Fehler 1. Art:

$$\sup_{\theta \in H} \mathbb{P}_\theta(X \in R);$$

Fehler 2. Art: H_1, aber H_0 angenommen, W.keit für einen Fehler 2. Art:

$$\sup_{\theta \in H^c} \mathbb{P}_\theta(X \notin R).$$

R wird meist mit Hilfe einer meßbaren Funktion $T : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ bestimmt, etwa durch $R = \{T \geq t\}$, t **kritischer Wert**, T **Teststatistik**. Ein Test **hat Niveau** α, wenn

$$\sup_{\theta \in H} \mathbb{P}_\theta(X \in R) \leq \alpha.$$

Übliche Werte für α: $0,05$, $0,02$, $0,01$. Der Verwerfungsbereich R wird üblicherweise durch Bedingungen an den **Likelihoodquotienten**

$$q(x) = \frac{\sup_{\theta \in H^c} L_x(\theta)}{\sup_{\theta \in H} L_x(\theta)}, \quad x \in \mathcal{X},$$

formuliert.

Wir diskutieren nun einen der wichtigsten elementaren Tests.

Beispiel 6 (t-Test)

Seien $X_1, \cdots, X_n$ unabhängig, normalverteilt zu Parametern (μ, σ^2). Getestet werden soll

$$H = \{(\mu, \sigma^2) : \mu = \mu_0, \sigma > 0\},$$

gegen

$$H^c = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \neq \mu_0, \sigma > 0\}.$$

Unsere Verteilungen haben die Dichtefunktionen

$$f_\theta(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2), \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \theta \in \Theta.$$

Aus Beispiel 5 ist bekannt

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in H} L_x(\theta) &= \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma^2})^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{1}{2\hat{\sigma^2}} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2), \\ \hat{\sigma^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2. \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\sup_{\theta \in H} L_x(\theta) = \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma^2})^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{n}{2}).$$

Entsprechend

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in H^c} L_x(\theta) &= \frac{1}{(2\pi\tilde{\sigma^2})^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{1}{2\tilde{\sigma^2}} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2), \\ \tilde{\sigma^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2. \end{aligned}$$

Das impliziert

$$\sup_{\theta \in H^c} L_x(\theta) = \frac{1}{(2\pi\tilde{\sigma^2})^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{n}{2}).$$

Also ist für $x \in \mathcal{X}$

$$q(x)^{\frac{2}{n}} = \frac{\hat{\sigma^2}}{\tilde{\sigma^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x} + \overline{x} - \mu_0)^2)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2)} = 1 + \frac{n}{\tilde{\sigma}^2} (\overline{x} - \mu_0)^2.$$

Wir machen uns zunächst plausibel, wie der kritische Bereich gewählt werden sollte. Ist q groß, so sollte H^c den richtigen Parameter enthalten, bei kleinem q der Bereich H. Verworfen wird also bei großem q. Also ist zu wählen

$$R = \{q > t\}$$

mit geeignetem t. Wir verwenden als Teststatistik die Funktion

$$T(x) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu_0)}{s(x)}, \quad s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Dann gilt

$$q^{\frac{2}{n}} = 1 + \frac{n-1}{n}T^2.$$

Daher ist T groß genau dann, wenn q groß. Also steuern wir an

$$R = \{T > t\}.$$

t wird passend zur Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art gewählt. Diese hängt dann von der Verteilung von T unter der Normalverteilung mit Parametern (μ_0, σ^2) ab. Wir studieren diese Verteilung.

Seien für $1 \leq i \leq n$

$$Y_i = \frac{1}{\sigma}(X_i - \mu_0).$$

Dann $(Y_i : 1 \leq i \leq n)$ unabhängig und standardnormalverteilt, und es gilt

$$T(X) = \frac{\sqrt{n}\overline{Y}}{s(Y)}.$$

Lemma 1

Sei $(Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ ein Vektor aus unabhängigen standardnormalverteilten ZV'en, A eine orthogonale $n \times n$-Matrix, $Z = AY$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_Y.$$

Beweis

Die Dichte von $\mathbb{P}_Y$ ist gegeben durch

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}|y|^2), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Also gilt für $B \in \mathcal{B}^d$ wegen des Integraltransformationssatzes

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_Z(B) &= \mathbb{P}(Z \in B) = \mathbb{P}(Y \in A^{-1}B) \\
&= \int_{A^{-1}B} f(y)dy = \int_B f(Ay)dy \\
&= \int_B f(y)dy = \mathbb{P}_Y(B).
\end{aligned}$$

Daher folgt $\mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_Z$. $\square$

Lemma 2

In der Situation von Lemma 1 gilt $\overline{Y}, s(Y)$ sind unabhängig, also auch $\overline{X}, s(X)$. Ferner ist $\sqrt{n}\overline{Y}$ standardnormalverteilt, und $(n-1)s^2(Y)$ ist verteilt wie $Z_1^2 + \cdots + Z_{n-1}^2$, wobei $Z_1, \cdots, Z_{n-1}$ unabhängig und standardnormalverteilt.

Beweis

Sei

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i = (AY)_1.$$

Also $a_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}, 1 \leq j \leq n$. Wähle nach Gram-Schmidt Vektoren $a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^n$, so dass $A = [a_1, \cdots, a_n]$ eine orthogonale Matrix ist. Sei $Z = AY$. Dann

$$\begin{aligned}
(n-1)s^2(Y) &= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - Z_1^2 = Z_2 + \cdots + Z_n^2,
\end{aligned}$$

Wende Lemma 1 an. $\square$

Die Verteilung von $s(Y)$ studieren wir genauer.

Definition

Seien $Z_1, \cdots, Z_n$ unabhängig und standardnormalverteilt. Sei $Z = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$. Dann heißt Z **χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden**.

Lemma 3

Sei Z χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden. Dann hat $\mathbb{P}_Z$ die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Beweis

Wir argumentieren für $n = 2$. Dann ist für $r > 0$ vermöge Polarkoordinatentransformation und der Substitution $v = u^2$ mit $2udu = dv$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \leq r) &= \frac{1}{2\pi} \int 1_{[0,r]}(z_1^2 + z_2^2) \exp(-\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)) dz_1\, dz_2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r}} u \exp(-\frac{1}{2}u^2) du d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^r \exp(-\frac{v}{2}) dv.
\end{aligned}$$

□

Damit kennen wir die Verteilung von $\sqrt{n}\overline{Y}$ und von $(n-1)s(Y)$. Wir benötigen die des Quotienten.

Lemma 4

Seien X standardnormalverteilt, Y χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden, X, Y unabhängig. Dann ist $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ absolutstetig verteilt mit Dichte

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{n}} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann unter Benutzung der Transformation $y' = \frac{y\sqrt{n}}{\sqrt{z}}$, $z' = \sqrt{z}$ mit Funktionaldeterminante $\frac{2(z')^2}{\sqrt{n}}$ sowie $u = z'\sqrt{1 + \frac{(y')^2}{2}}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leq x) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{[0,x]}(\frac{y}{\sqrt{\frac{z}{n}}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}y^2) \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} dy\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} 1_{[0,x]}(y') \exp(-\frac{1}{2}(y')^2 \frac{(z')^2}{n})(z')^{n-2} e^{-\frac{(z')^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{n}} (z')^2 dz'\, dy' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}} \frac{2}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^x \exp(-\frac{1}{2}(z')^2(1 + \frac{(y')^2}{n}))(z')^n dy'\, dz' \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{n}} \int_0^x (1 + \frac{(y')^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} dy'.
\end{aligned}$$

□

Definition

Eine ZV T heißt **student-verteilt mit** n **Freiheitsgraden** ($t(n)$**-verteilt**), wenn $\mathbb{P}_T$ die Dichte

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{n}}(1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

besitzt. Für $n = 1$ heißt T auch **Cauchy-verteilt.**

Nach Lemma 4 ist unsere Test-Statistik $T(Y) = T(X)$ also $t(n-1)$-verteilt.

Wir kommen zurück zur Konstruktion des kritischen Bereichs. Gesucht ist ein Test zum Niveau α, d.h. wir brauchen

$$\sup_{\theta \in H} \mathbb{P}_\theta(|T(Y)| > t) = \alpha.$$

Da $T(Y)$ symmetrisch, braucht man also das $1 - \frac{\alpha}{2}$-Quantil der $t(n-1)$-Verteilung, definiert durch

$$\int_{-\infty}^{t_{1-\frac{\alpha}{2}}} f(y)dy = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Solche Quantile sind tabelliert, und in den üblichen Statistik-Paketen enthalten. Also ist

$$R = \{x : |T(x)| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$$

geeignet. Man nennt diesen Test **zweiseitig**. **Einseitige** Tests würden z.B. Hypothesen mit $H = \{\mu : \mu < \mu_0\}$ testen.