Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Markus Bibinger, Dr. Hanna Döring,
Alexander Fromm

Blatt 10
SS 2011
16. Juni 2011

Übungen zu Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Seien $X, X_1, X_2, \ldots, Y, Y_1, Y_2, \ldots$ reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ aus den

a) fast sicheren, b) stochastischen

Konvergenzen $X_n \to X$, $Y_n \to Y$ die Konvergenz $aX_n + bY_n \to aX + bY$ im jeweiligen Sinne folgt.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
A schlägt B folgendes Spiel vor: „Hier habe ich eine unfaire Münze, die Kopf mit Wahrscheinlichkeit $p \in (1/3, 1/2)$ zeigt. Du brauchst nur 100 Euro Startkapital und jedes Mal, wenn die Münze Kopf zeigt, verdoppele ich Dir Dein Kapital. Andernfalls musst Du mir die Hälfte Deines Kapitals zahlen. X_n bezeichne Dein Kapital nach dem n-ten Münzwurf. Wie Du leicht sehen kannst gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \infty.$$

Damit Du auch sicher was gewinnst, einigen wir uns vorher darauf sehr häufig zu spielen.“
Soll B sich auf dieses Spiel einlassen? Überprüfen Sie A's Behauptung und zeigen Sie, dass X_n fast sicher gegen Null konvergiert.
Hinweis: Berechnen Sie W_n in der Rekursion $X_n = X_{n-1}(1 + W_n)$ und wenden Sie das starke Gesetz der großen Zahlen auf $\ln(1 + W_i)$, $i \in \mathbb{N}$, an.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Bernoulli-Folge zu $0 < p < 1$. Beweisen Sie, dass für alle $p < a < 1$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\right) \leq e^{-nh(a;p)},$$

wobei $h(a; p) = a \ln \frac{a}{p} + (1 - a) \ln \frac{1-a}{1-p}$. Zeigen Sie dazu zuerst, dass für alle $s \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\right) \leq e^{-nas}\mathbb{E}\big(e^{sX_1}\big)^n.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie die Implikationen $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$ folgender Aussagen:

a) Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\mathbb{P}$-stochastisch.

b) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \mathbb{P}(|X_k - X_n| \geq \varepsilon) = 0$.

c) Zu jeder Teilfolge $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt es eine weitere Teilfolge $(X_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$, die $\mathbb{P}$-f.s. konvergiert.

Hinweis: $b) \Rightarrow c)$: Nutzen Sie das Lemma von Borel-Cantelli.

Abgabe: Do, 23.06.2011, bis 13.15, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Abgabe in Zweiergruppen ist möglich.