Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Markus Bibinger, Dr. Hanna Döring,
Alexander Fromm

Blatt 11
SS 2011
23. Juni 2011

Übungen zu Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte).
An einer Wahl zwischen den Kandidaten A und B nehmen 1000 000 Wähler teil. Davon kennen 2000 den Kandidaten A aus Wahlkampfveranstaltungen und stimmen geschlossen für ihn. Die übrigen 998000 Wähler sind mehr oder weniger unentschlossen und treffen ihre Entscheidung unabhängig voneinander durch Werfen einer fairen Münze.
Wie groß ist in etwa die Wahrscheinlichkeit, dass A die Wahl gewinnt?

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Es sei $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ der Poisson-Prozess zur Intensität $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass fast sicher[1] gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, zum Parameter $\alpha > 0$ exponentialverteilter Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass fast sicher[1] gilt:

a) $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = \frac{1}{\alpha}$,

b) $\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reellwertiger Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $n \to \infty$ für eine reellwertige Zufallsvariable X. Zeigen Sie, dass $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}} := (X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X konvergiert. Begründen Sie zunächst, dass es ausreicht zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(Z_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$ für alle beschränkten Lipschitz-stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Abgabe: Do, 30.06.2011, bis 13.15, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Abgabe in Zweiergruppen ist möglich.

[1] d.h. mit Wahrscheinlichkeit 1