Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Markus Bibinger, Dr. Hanna Döring,
Alexander Fromm

Blatt 12
SS 2011
30. Juni 2011

Übungen zu Stochastik 1

Aufgabe 1 (3 Punkte).
Die Bevölkerung der Stadt S setze sich zusammen aus 20% Studenten, 30% Schülern und 50% sonstigen. 80% aller Schüler können einen Web-Browser bedienen, von den Studenten sind es 60% und von den sonstigen 30%. Sie gehen in S in ein Internet-Cafe und treffen dort auf eine Person, die einen Web-Browser bedienen kann. Wie wahrscheinlich ist diese Person Schüler/Schülerin?

Aufgabe 2 (3 Punkte).
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in]0,1[$. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei Ziffern in der Folge $1,0,1$ lauten? Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 4-te bis 6-te Ziffern $1,0,1$ lauten? Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sequenz $1,0,1$ sich in der Folge unendlich oft finden lässt?

Aufgabe 3 (3 Punkte).
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unkorrelierter reellwertiger Zufallsvariablen mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[X_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Folge reellwertiger Zufallsvariablen mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[Y_n^2] < \infty$.
Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher konvergiert. Was ist der Grenzwert?

Aufgabe 4 (3 Punkte).
Es sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie die Verteilung von $Y := e^{-\lambda X}$ auf $]0,1]$.

Aufgabe 5 (3 Punkte).
Es sei Π eine zufällige Permutation[1] auf $\{1,\ldots,n\}$. Alle der $n!$ Permutationen seien gleich wahrscheinlich.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(\Pi(k) = k)$ und $\mathbb{P}(\Pi(k) = k, \Pi(j) = j)$ für $k, j \in \{1,\ldots,n\}$, $k \neq j$.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl $X = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{\Pi(k)=k\}}$ der Fixpunkte der Permutation Π.

Aufgabe 6 (3 Punkte).
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $(X_k)_{k=1,\ldots,n}$ unabhängige identisch verteilte reellwertige Zufallsvariablen. Sei π eine beliebige feste Permutation auf $\{1,\ldots,n\}$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von $(X_{\pi(1)},\ldots,X_{\pi(n)})$ gleich ist der Verteilung von $(X_1,\ldots,X_n)$.
Hinweis: Argumentieren Sie mit einem durchschnittsstabilen Erzeuger von $\mathcal{B}^n$.

Aufgabe 7 (3 Punkte).
Ein Unternehmen hat insgesamt $n = 1000$ Aktien an seine Mitarbeiter ausgegeben. Diese entscheiden sich bei jeder Aktie mit Wahrscheinlichkeit $p \in]0,1[$ zum Verkauf der Aktie. Diese Entscheidung findet bei jeder Aktie unabhängig statt. Der Markt kann maximal 50 Aktien aufnehmen, ohne dass der Kurs fällt.
Bestimmen sie in Abhängigkeit von p näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs fällt.
Wie groß muss p in etwa sein, damit der Kurs mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% nicht fällt?

[1] d.h. eine Bijektion von $\{1,\ldots,n\}$ nach $\{1,\ldots,n\}$

Abgabe: Do, 07.07.2011, bis 13.15, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Abgabe in Zweiergruppen ist möglich.