Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Markus Bibinger, Dr. Hanna Döring,
Alexander Fromm

Blatt 2
SS 2011
21. April 2011

Übungen zu Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir nennen zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ *äquivalent*, falls gilt: $\mathbb{P}(A \triangle B) = 0$. Dabei ist $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ die symmetrische Differenz von A und B.
Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) A und B sind äquivalent

b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B)$

c) $\mathbb{P}(A \cap B) = \max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$

d) $\mathbb{P}(A \cup B) = \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ paarweise fast disjunkte Mengen, d.h. $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Es sei Ω eine abzählbare Menge. Nach der σ-Additivität lässt sich jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ durch $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ darstellen.
Umgekehrt sei $\rho : \Omega \to [0,1]$ eine beliebige Abbildung mit $\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$. Wir definieren nun $\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} \rho(\omega)$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Es sei $\Omega := \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ mit $\Omega_i := \{0,1\}$, für $i \in \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{F} := \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(\Omega_i)$ die Produkt-σ-Algebra, d.h.

$$\mathcal{F} = \sigma(\{A \subseteq \Omega \,|\, A = \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega \,|\, \omega_j \in B\} \text{ für ein } j \in \mathbb{N} \text{ und } B \subseteq \Omega_j\}).$$

Sei weiterhin $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}$, so dass

$$\mathbb{P}(\{(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega \,|\, \omega_j = a_j \text{ für } j = 1, \ldots, N\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

für beliebige $N \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \{0,1\}$, $j = 1, \ldots, N$.
Wir definieren eine Abbildung $T : \Omega \to [0,1]$ durch

$$(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \cdot 2^{-i}.$$

Zeigen Sie $T^{-1}(\mathcal{B}_{[0,1]}) \subseteq \mathcal{F}$, indem Sie

$$\mathcal{B}_{[0,1]} = \sigma(\{[m \cdot 2^{-n}, (m+1) \cdot 2^{-n}] \,|\, n \in \mathbb{N},\, m \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}\})$$

verwenden.
Es sei nun μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}_{[0,1]}$ mit

$$\mu(A) = \mathbb{P}(T^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{B}_{[0,1]}.$$

Bestimmen Sie μ.

Abgabe: Donnerstag, 28.04.2011 **vor der Vorlesung**
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Abgabe in Zweiergruppen ist möglich.