Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Markus Bibinger, Dr. Hanna Döring,
Alexander Fromm

Blatt 5
SS 2011
12. Mai 2011

Übungen zu Stochastik 1

Aufgabe 1 (5 Punkte).
Es sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable und Y eine exponential verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{P}(X \geq n+k | X \geq n) = \mathbb{P}(X \geq k) \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}_+$

b) $\mathbb{P}(Y \geq s+t | Y \geq s) = \mathbb{P}(Y \geq t) \quad \forall s, t \in [0, \infty)$

c) Zeigen Sie, dass jede $\mathbb{Z}_+$-wertige Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}(X \geq n) > 0 \; \forall n \in \mathbb{Z}_+$, welche a) erfüllt, bereits geometrisch verteilt sein muss.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Ein Pfeifenraucher hat in jeder seiner Hosentaschen eine Streichholzschachtel. Jedes Mal, wenn er ein Streichholz benötigt, entnimmt er es zufällig aus einer der beiden Taschen. Ursprünglich enthält jede Schachtel N Streichhölzer. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der anderen Schachtel genau k Hölzer befinden, wenn er feststellt, dass die erste Schachtel gerade leer geworden ist?

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Seien X_n Zufallsvariablen, die geometrisch verteilt sind zu den Parametern $p_n \in (0,1)$, das heißt, für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ gilt $\mathbb{P}(X_n = k) = p_n(1-p_n)^k$. Weiterhin sei X eine zu $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable, das heißt X hat die Dichte $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $f_X(x) = 0$, $x < 0$. Es gelte weiterhin $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$.

a) Sei $F_{X_n^*}(x) = \mathbb{P}(X_n^* \leq x)$ die Verteilungsfunktion von $X_n^* := X_n/n$. Zeigen Sie für alle $x \geq 0$

$$F_{X_n^*}(x) = 1 - (1-p_n)^{1+\lfloor nx \rfloor},$$

wobei $\lfloor nx \rfloor$ der ganzzahlige Anteil von nx ist, d.h. $\lfloor nx \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} : \; m \leq nx\}$.

b) Sei $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ die Verteilungsfunktion von X. Folgern Sie:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n^*}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Hinweis: Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty}(1 + a_n/n)^n = e^a$.)

c) Beschreiben Sie kurz, was Sie damit gezeigt haben.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Über einen verrauschten Kanal werden binäre Ziffern versendet. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine 0 oder 1 übertragen werden soll, ist jeweils 0.5. Die Wahrscheinlichkeit, dass die empfangene Ziffer der versendeten entspricht, ist 0.9.

a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 versendet wurde, wenn 1 empfangen wurde.

b) Es wird nun zur Sicherheit die zu übertragende Ziffer jeweils dreimal verschickt (d.h. 111 oder 000). Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 übertragen werden sollte, wenn 111 empfangen wurde?
Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 übertragen werden sollte, wenn bekannt ist, dass die Summe der drei empfangenen Ziffern gleich 2 ist?

Abgabe: Donnerstag, 19.05.2011, **bis 13.15, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25**
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Abgabe in Zweiergruppen ist möglich.