Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Markus Bibinger, Dr. Hanna Döring,
Alexander Fromm

Blatt 7
SS 2011
26. Mai 2011

Übungen zu Stochastik 1

Aufgabe 1 (3 Punkte).
Die Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist eine diskrete Verteilung auf $\mathbb{Z}_+$. Seien X, Y unabhängig und Poisson-verteilt mit Parameter λ, bzw. μ.

a) Zeigen Sie, dass $X + Y$ Poisson-verteilt ist zum Parameter $\lambda + \mu$.

b) Gilt dies auch, wenn man auf die Voraussetzung der Unabhängigkeit von X und Y verzichtet? Beweisen Sie Ihre Aussage!

c) Bestimmen Sie für festes $n \in \mathbb{Z}_+$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = k | X + Y = n)$ für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Seien X und Y zwei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{P}(X = k) = 2^{-k}$. Bestimmen Sie:

a) $\mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq k)$ und $\mathbb{P}(\min\{X, Y\} \leq k)$ für $k \in \mathbb{N}$,

b) $\mathbb{P}(X = Y)$ und $\mathbb{P}(X < Y)$,

c) $\mathbb{P}(X \geq kY)$ für $k \in \mathbb{N}$,

d) $\mathbb{P}(X \text{ teilt } Y)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Menge $A \in \mathcal{F}$ heißt $\mathbb{P}$-Atom, wenn $\mathbb{P}(A) > 0$ ist und für $B \in \mathcal{F}$ mit $B \subset A$ gilt: $\mathbb{P}(B) \in \{0, \mathbb{P}(A)\}$. Zeigen Sie:

a) Sind A und B $\mathbb{P}$-Atome, die nicht äquivalent sind (d.h. $\mathbb{P}(A \Delta B) \neq 0$), so ist $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

b) Es gibt höchstens abzählbar viele paarweise nicht äquivalente $\mathbb{P}$-Atome.

c) Ω lässt sich zerlegen in eine Menge A_0, die kein $\mathbb{P}$-Atom enthält und abzählbar viele paarweise disjunkte $\mathbb{P}$-Atome.
Hinweis: Verwenden Sie gegebenenfalls das Auswahlaxiom bzw. das Lemma von Zorn.

d) Zu jedem $\alpha \in [0, \mathbb{P}(A_0)]$ existiert eine Menge $A_\alpha \subset A_0$, $A_\alpha \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A_\alpha) = \alpha$.
Hinweis: Konstruieren Sie zunächst induktiv eine absteigende Folge von Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{F}$, so dass $A_1 = A_0$, $\alpha \leq \mathbb{P}(A_{n+1}) \leq \alpha_n + \frac{1}{n}$, wobei $\alpha_n := \inf\{\mathbb{P}(A) \,|\, A \subseteq A_n,\, A \in \mathcal{F}, \alpha \leq \mathbb{P}(A)\}$. Konstruieren Sie dazu analog eine aufsteigende Folge von Mengen.

Aufgabe 4 (3+2+2* Punkte).
Sei $\alpha > 0$ und $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und zum Parameter α exponentialverteilten Zufallsvariablen. Definiere damit $T_n := \sum_{i=1}^{n} L_i$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Es sei nun durch $N_t := \max\{k \in \mathbb{Z}_+ | T_k \leq t\}$, $t \geq 0$ der Poisson-Prozess zur Intensität α gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Verteilung von T_n durch die Dichte $\frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ gegeben ist und bestimmen Sie für $s, t \geq 0$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T_n \leq t,\, t+s \leq T_{n+1})$.
Hinweis: Betrachten Sie die Dichte des Zufallsvektors (T_n, L_{n+1}) auf $\mathbb{R}_+^2$.

b) Zeigen Sie, dass N_t Poisson-verteilt ist zum Parameter λt, sowie dass $\mathbb{P}(T_{n+1} - t \geq s | N_t = n) = e^{-\lambda s}$, für $s, t \geq 0$. Was bedeutet das letztere anschaulich.

c) Wir definieren $L_1' := T_{N_t+1} - t$, $L_2' := T_{N_t+2} - T_{N_t+1}$, $L_3' := T_{N_t+3} - T_{N_t+2}$, etc. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $N_t, L_1', L_2', \ldots$ unabhängig sind und dass $(L_i')_{i\in\mathbb{N}}$ zu $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ identisch verteilt ist.
Folgern Sie daraus, dass für $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ die Inkremente $(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})$ voneinander unabhängig und Poisson-verteilt zum Parameter $\alpha(t_i - t_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$ sind.

Abgabe: Freitag, 03.06.2011, **bis 13.15, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25**
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Abgabe in Zweiergruppen ist möglich.