Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Markus Bibinger, Dr. Hanna Döring,
Alexander Fromm

Blatt 8
SS 2011
2. Juni 2011

Übungen zu Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in messbaren Räumen $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Es sei $\mathcal{G}_n := \sigma((Y_k)_{k\geq n}) = ((Y_k)_{k\geq n})^{-1}\left(\bigotimes_{k\geq n}\mathcal{F}_k\right)$ für $n \in \mathbb{N}$, sowie $\mathcal{A} := \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_n$.

a) Begründen Sie, dass $\mathcal{A}$ gerade aus allen asymptotischen Ereignissen für $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besteht, sowie, dass es sich in der Tat um eine σ-Algebra handelt.

b) Es gelte nun $(\Omega_k, \mathcal{F}_k) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$, $k \in \mathbb{N}$. Für festes $B \in \mathcal{B}^1$ betrachten wir das Ereignis
$$A := \left\{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k \text{ existiert und liegt in } B\right\} \in \mathcal{F}.$$
Zeigen Sie $A \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 2 (3+2* Punkte).
Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige, auf $\{-1, 1\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen und $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{Z}_+$. $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ist die sogenannte symmetrische Irrfahrt.

a) Zeigen Sie für alle festen $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(|S_{n+k} - S_n| = k$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}) = 1$.

b) Schließen Sie aus a), dass $\mathbb{P}(|S_n| \leq m$ für alle $n \in \mathbb{N}) = 0$ für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ und weiter, dass
$$\mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \infty \text{ oder } \inf_{n\in\mathbb{N}} S_n = -\infty) = 1.$$

c) Zeigen Sie $\mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \infty) = \mathbb{P}(\inf_{n\in\mathbb{N}} S_n = -\infty) = 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Die Anzahl der Eier, die ein Insekt legt, sei Poisson-verteilt zum Parameter λ. Aus jedem der sich unabhängig voneinander entwickelnden Eier schlüpfe mit Wahrscheinlichkeit p eine Larve. Berechnen Sie die Verteilung der Anzahl der Larven.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}_+$. Angenommen es gilt $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2] < \infty$. Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{E}[X]$, sowie $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{E}[X^2]$.

Abgabe: Do, 09.06.2011, bis 13.15, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Abgabe in Zweiergruppen ist möglich.