Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Markus Bibinger, Dr. Hanna Döring,
Alexander Fromm

Blatt 9
SS 2011
9. Juni 2011

Übungen zu Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Seien X und $Y \in \mathcal{L}^5(\mathbb{P})$ zwei Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\mathbb{E}(|X - Y|) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = Y) = 1$,

b) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) \Rightarrow \mathbb{P}(X = Y) = 1$,

c) $V(X) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$,

d) $\mathbb{E}(X^4) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = 0$,

e) $\mathbb{E}(X^5) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X^3) = 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Seien X und $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ zwei Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Bestimmen Sie das Minimum, sowie die Minimalstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ,\ (a, b) \mapsto \mathbb{E}\left((Y - a \cdot X - b)^2\right) .$$

Was ergibt speziell der Fall $X = 0$.
Stellen Sie im Fall $V(X) > 0$, die Minimalstellen explizit als Funktion von $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), V(X), V(Y)$ und $\mathrm{cov}(X, Y)$ dar.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{Z}_+$ mit einer Zähldichte ϱ. Wir definieren die *erzeugende Funktion* von μ durch

$$\varphi_\mu(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \varrho(k) s^k\ , \quad 0 \leq s \leq 1\ .$$

a) Berechnen Sie die zu einer geometrischen Verteilung und einer Poisson-Verteilung zugehörigen erzeugenden Funktionen.

b) Sei X eine $\mathbb{Z}_+$-wertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. X habe die Verteilung μ auf $\mathbb{Z}_+$ und es gelte $X \in \mathcal{L}^n(\mathbb{P})$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für die n-te Ableitung $\varphi_\mu^{(n)}$ von φ_μ:

$$\varphi_\mu^{(n)}(0) := \lim_{s \downarrow 0} \varphi_\mu^{(n)}(s) = n! \varrho(n)\ ,$$
$$\varphi_\mu^{(n)}(1) := \lim_{s \uparrow 1} \varphi_\mu^{(n)}(s) = \mathbb{E}\left(X \cdot (X - 1) \cdot \ldots \cdot (X - n + 1)\right)\ .$$

Aufgabe 4 (4 Punkte).
In einer Urne liegen m weiße und $N-m$ schwarze Kugeln ($m, N \in \mathbb{N}$, $m < N$). Es werden zufällig $n \leq N$ Kugeln aus der Urne ohne Zurücklegen entnommen, die Anordnung spielt keine Rolle. Sei X die Anzahl der weißen Kugeln in der Stichprobe. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $V(X)$.

Hinweis: Schreiben Sie $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *mit* $\{0,1\}$*-wertigen Zufallsvariablen* X_i, $1 \leq i \leq n$.

Abgabe: Do, 16.06.2011, bis 13.15, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Abgabe in Zweiergruppen ist möglich.