Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Dipl.-Math. Alexander Fromm

Blatt 7
WS 2012/13
28. November 2012

Übungen zu Stochastik II

Aufgabe 1 (5 Punkte).
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal mit $M_n \in L^2(\mathbb{P})$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{E}[(M_{n+k} - M_n)^2|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+k}^2 - M_n^2|\mathcal{F}_n]$ für beliebige $n, k \in \mathbb{N}_0$.

b) Erfüllt das Martingal die Bedingung $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2] < \infty$, so konvergiert es $\mathbb{P}$-f.s. und in $L^2(\mathbb{P})$.

Es sei nun $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n a_n$ $\mathbb{P}$-f.s. und in $L^2(\mathbb{P})$ konvergiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie:

a) Es seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ zwei gleichgradig integrierbare Familien von Zufallsvariablen. Dann ist $\mathcal{X}+\mathcal{Y} = \{X + Y|X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\}$ ebenfalls gleichgradig integrierbar.

b) Existiert für eine Familie $\mathcal{X}$ von Zufallsvariablen ein $Y \in L^1$ mit $|X| \leq |Y|$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $X \in \mathcal{X}$, so ist $\mathcal{X}$ gleichgradig integrierbar.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter $\{-1, 1\}$-wertiger Zufallsvariablen, so dass $\mathbb{E}[Z_1] = 0$ und $\mathrm{Var}(Z_1) = 1$. Sei $M_n := \sum_{k=1}^{n} Z_k$ mit $M_0 = 0$. Wir setzen für $c \in \mathbb{Z}$:

$$\tau_c := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 | M_n = c\}$$

Es seien $a, b \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie für $\tau := \tau_a \wedge \tau_{-b}$, dass $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_{-b})$ explizit als Funktion von a und b.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\mathbb{E}[M_\tau]$.

c) Ein Spieler wirft immer wieder eine faire Münze mit dem Einsatz 1 Euro je Spielschritt, d.h. nach jedem Spielschritt hat der Spieler entweder einen Euro mehr oder einen Euro weniger. Das Startkapital des Spielers beträgt 10 Euro. Das Spiel wird beendet, wenn der Spieler entweder kein Geld mehr hat oder wenn er zum ersten Mal den Betrag von 42 Euro erreicht.
Wie hoch ist der erwartete Gewinn/Verlust des Spiels? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler sein ganzes Geld verspielt?

Aufgabe 4 (3 Punkte).
Finden Sie ein Martingal $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und eine Stoppzeit τ mit $\mathbb{E}[\tau] < \infty$, so dass $\mathbb{E}[M_\tau] \neq \mathbb{E}[M_0]$.

Abgabe: Mittwoch, 05.12.2012, **bis 9.10 Uhr, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25**
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen und Matrikelnummer zu versehen. Bitte in 2-er Gruppen abgeben.